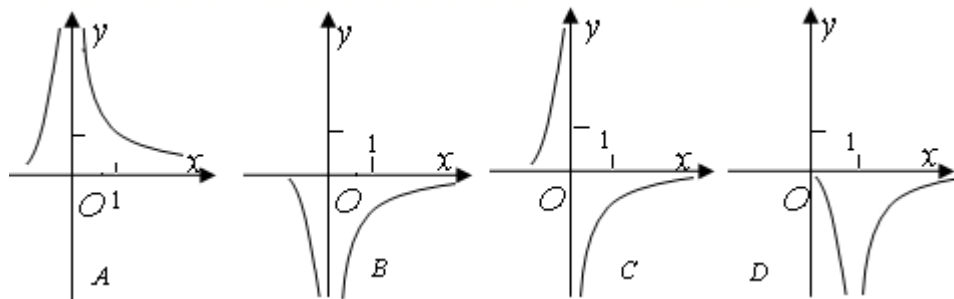


2022 届高三数学午间练 6.20

1. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{\ln(x+1) - x}$, 则 $y = f(x)$ 的图像大致为



【答案】B

【解析 1】定义域为 $(-1, 0) \cup (0, +\infty)$, $f'(x) = \frac{x}{(x+1)(\ln(x+1) - x)^2}$

$\therefore f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 是减函数, 在 $(0, +\infty)$ 是增函数, 结合选项, 只有 B 符合, 故选 B.

【解析 2】 $g(x) = \ln(1+x) - x \Rightarrow g'(x) = -\frac{x}{1+x}$

$\Rightarrow g'(x) > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 0, g'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 0 \Rightarrow g(x) < g(0) = 0$

2. 已知函数 $f(x) = x^3 + 2ax + \sin x$, 现有下列四个结论:

- ① $f(x)$ 是奇函数;
- ② 当 $a = \frac{2}{3}$ 时, $f(x)$ 恰有两个零点;
- ③ 若 $f(x)$ 为增函数, 则 $a \geq -\frac{1}{2}$;
- ④ 当 $a = -\frac{2}{3}$ 时, $f(x)$ 恰有两个极值点.

所有正确结论的编号是 ()

- A. ①③ B. ①③④ C. ②④ D. ①②③

【答案】B

【分析】

由奇偶性的定义可判断出①正确;

利用导数可求得 $f'(x) > 0$, 知 $f(x)$ 单调递增, 结合 $f(0) = 0$ 知②错误;

将 $f(x)$ 为增函数转化为 $f'(x) \geq 0$ 恒成立, 利用分离变量法可得 $2a \geq h(x) = -3x^2 - \cos x$,

利用导数可求得 $h(x)_{\max} = h(0) = -1$, 由此得到 $a \geq -\frac{1}{2}$, 知③正确;

利用导数可求得 $f'(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 结合零点存在定理可知 $f'(x)$ 存在两个变号零点, 由此知④正确.

【详解】

对于①, $f(x)$ 定义域为 $\mathbf{R}$, $f(-x) = -x^3 - 2ax - \sin x = -f(x)$, $\therefore f(x)$ 为奇函数, ①正确;

对于②, 当 $a = \frac{2}{3}$ 时, $f(x) = x^3 + \frac{4}{3}x + \sin x$, $\therefore f'(x) = 3x^2 + \frac{4}{3} + \cos x$,

$\because \cos x \in [-1, 1]$, $\therefore \frac{4}{3} + \cos x > 0$, $\therefore f'(x) > 0$, $\therefore f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,

又 $f(0) = 0$, $\therefore f(x)$ 有且仅有 $x = 0$ 一个零点, ②错误;

对于③, $f'(x) = 3x^2 + 2a + \cos x$,

若 $f(x)$ 为增函数, 则 $f'(x) \geq 0$ 对 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, $\therefore 2a \geq -3x^2 - \cos x$,

令 $h(x) = -3x^2 - \cos x$, 则 $h'(x) = -6x + \sin x$, $h''(x) = -6 + \cos x < 0$,

$\therefore h'(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 又 $h'(0) = 0$,

$\therefore$ 当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $h'(x) > 0$; 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $h'(x) < 0$;

$\therefore h(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, $\therefore h(x) \leq h(0) = -1$

$\therefore 2a \geq -1$, 解得: $a \geq -\frac{1}{2}$, 即若 $f(x)$ 为增函数, 则 $a \geq -\frac{1}{2}$, ③正确;

对于④, 当 $a = -\frac{2}{3}$ 时, $f(x) = x^3 - \frac{4}{3}x + \sin x$, 则 $f'(x) = 3x^2 - \frac{4}{3} + \cos x$,

$\therefore f''(x) = 6x - \sin x$, $f'''(x) = 6 - \cos x > 0$,

$\therefore f''(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 又 $f''(0) = 0$,

$\therefore f'(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

$\because f'(0) = -\frac{1}{3} < 0$, $f'(-1) = \frac{5}{3} + \cos(-1) > 0$, $f'(1) = \frac{5}{3} + \cos 1 > 0$,

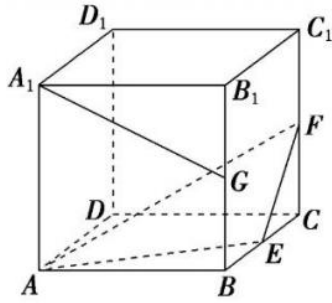
$\therefore f'(x)$ 在 $(-1,0)$ 和 $(0,1)$ 上分别存在一个变号零点,

$\therefore f(x)$ 有两个极值点, ④正确.

故选: B.

3. (多选题) 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, E, F, G 分别为 BC, CC_1, BB_1 的中点. 则

()



A. 直线 D_1D 与直线 AF 垂直

B. 直线 A_1G 与平面 AEF 平行

C. 平面 AEF 截正方体所得的截面面积为 $\frac{9}{8}$

D. 点 C 与点 G 到平面 AEF 的距离相等

答案: .BC

4. 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA=PC=2$, $BA=BC=1$, $\angle ABC=90^\circ$, 若 PA 与底面 ABC 所成的角为 60° , 则点 P 到底面 ABC 的距离是_____; 三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的表面积_____.

答案: . $\sqrt{3}; 5\pi$