教材分析从理解走向探究：寻找均值不等式链中的主线

葛慧敏 徐章韬

（华中师范大学 数学与统计学学院 430079）

1 引言

二元均值不等式链是指$\frac{2ab}{a+b}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$，是一个重要的课后习题.古希腊人用定比分点给出了上述各种平均的定义法.[1]数学史料具有重要的教育价值，如何把其教育价值更好地彰显出来，一直是HPM的一个重要努力方向.借助历史，让学生经历思考过程，最后指向结果，这是获取数学活动经验，提高学生核心素养的重要手法，因为"没有过程等于没有结果"，[2]只要结果不要过程，不是认识论，也不是方法论.研究均值不等式链中的主线，在知识层面沟通了函数、不等式、解析几何等板块；在技能方面，学生获得了各种变换技法；在活动经验方面，看到了数学灵活的一方面，从结果理解走向了探究，这正是学科核心素养所要倡导的.

下面是在教材深度分析中，通过探究来理解教材的一个案例.这个案例的作用不只是从另外一个角度理解均值不等式，而是为了阐明一种一线串通的思考路径.

2 各种平均数的得来

2.1 算术平均数

算术平均数虽然简单，但却是各种平均的起点.算术平均数可以发展为加权平均数，甚至数学期望等.算术平均数的几何意象是中点，即$x-a=b-x$，变形即得$x=\frac{a+b}{2}$.记为$A=\frac{a+b}{2}$.为了便于推广，把$x-a=b-x$写成比式，即$\frac{b-x}{x-a}=1$.也可以写成$\frac{b-x}{x-a}=1=\frac{a}{a}=\frac{b}{b}$.

2.2 调和平均数

对算术平均中出现的基本结构$\frac{B-X}{X-A}=\lambda$进行常数λ和分式结构的变换.

（1）变常数

常数变易法是一种十分有趣且奇妙的变换法.对$\frac{b-x}{x-a}=1=\frac{a}{a}=\frac{b}{b}$的右边进行常数变易，不妨令$\frac{b-x}{x-a}=\frac{b}{a}$，则$x=\frac{2ab}{a+b}$为调和平均数，记为$H=\frac{2ab}{a+b}$.

（2）分式变换

进行倒数变换.倒数变换是代数变形中的一种常见技法.

令$B=\frac{1}{b},A=\frac{1}{a},X=\frac{1}{x},\lambda=1$，即$\frac{\frac{1}{b}-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{a}}=1$，得到$x=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\frac{2ab}{a+b}$，此时$\frac{1}{x}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$，$\frac{1}{x}$表示数$a$和数$b$倒数的算术平均数，也印证了调和平均数的概念[3]：调和的概念来源于古希腊毕达哥拉斯学派研究数字时发现的音乐属性，如果取三根琴弦，其长度分别为10，12，15，用同样的力弹拨这三根绷得一样紧的琴弦，它们将会分别发出很调和的乐声.研究它们的弦长时发现：$\frac{1}{10}-\frac{1}{12}=\frac{1}{12}-\frac{1}{15}$，这就被认为是调和乐音的数学机理了，变形可得$\frac{1}{12}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{15}+\frac{1}{10}\right)$，这

是一种新的平均形式，且称 12 为 10 和 15 的调和平均数.

2.3 几何平均数

(1)常数变易

对$\frac{b-x}{x-a}=\frac{b}{a}$的右边进行常数变易，不妨令$\frac{b-x}{x-a}=\sqrt{\frac{b}{a}}$，化简为 $x=\sqrt{ab}$ 为几何平均数，记为$G=\sqrt{ab}$.

(2)变常数为未知数

令$\frac{b-x}{x-a}=\frac{b}{x}$，化简得到 $x=\sqrt{ab}$，对$\frac{b-x}{x-a}=\frac{b}{x}$进行比例变换，得到$\frac{b-x}{b}=\frac{x-a}{x}$，即$\frac{x}{b}=\frac{a}{x}$，上式表达了 x 的平方可以用数 a 和数 b 的乘积表示. 几何平均数来源于欧几里德的《几何原本》[3]，该书最先提出了几何数列(即等比数列)的概念. 例如，两个正方形的边之比为$\frac{a}{b}$，则面积比为$\frac{a^2}{b^2}$，但巧妙之处在于必然存在一个数 ab，使得$\frac{a^2}{ab}$和$\frac{ab}{b^2}$的比值都等于$\frac{a}{b}$，于是 a^2、ab、b^2 形成了一个以 ab 为等比中项的等比数列(此时称几何数列)，进而推出几何平均数的概念——某数的平方等于另两个数的乘积，例中$(ab)^2=a^2\times b^2$，故 ab 是 a^2 和 b^2 的几何平均数.

(3)分式变换

对$\frac{b-x}{x-a}=\frac{b}{a}$进行分式变换，不妨令$\frac{b^2-x^2}{x^2-a^2}=\frac{b}{a}$，化简得 $x=\sqrt{ab}$ 为几何平均数. 这种变换也可看作是这样进行的，$\frac{b-x}{x-a}=\frac{x+a}{b+x}\cdot\frac{b}{a}$，对右边进行了大幅度的变换.

2.4 平方平均数

(1)常数变易

对$\frac{b-x}{x-a}=\frac{x+a}{b+x}\cdot\frac{b}{a}$进行常数变易，把$\frac{b}{a}$变成 1，则上式即为$\frac{b-x}{x-a}=\frac{x+a}{b+x}$，也得到 $x=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$，即 x 为平方平均数，也称为均方根. 记$Q=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

(2)分式变换

对$\frac{b-x}{x-a}=1$进行分式变换，不妨令$\frac{b^2-x^2}{x^2-a^2}=1$，得到 $x=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

3 各种平均数的统一

3.1 引出凸、凹函数的概念

上面四种平均数，都可以表面上写成算术平均的样子：$A=\frac{a+b}{2}$，$\frac{1}{H}=\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}$，

$$\lg G=\frac{\lg a+\lg b}{2},\quad Q^2=\frac{a^2+b^2}{2}.$$

对基本元素 a，b 实施倒代换，对 H 也实施相应的倒代换，对 a，b 实施对数代换，对 G 也实施相应的对数代换，对 a，b 实施平方代换，对 Q 也实施相应的平方代换. 按此程序得到各种“平均数 x”，其中 x 满足 $f(x)=\frac{f(a)+f(b)}{2}$. 对于复杂的 f，由此定义的平均数 x，可能很复杂. 为了认识它，人们就用熟悉的 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ 来认识 $f(x)$，这样 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ 与 $f(x)=\frac{f(a)+f(b)}{2}$ 之间会形成不等或相等关系，于是引出了凸、凹函数的概念.

3.2 得到大小关系链

均值不等式链中的四个平均数都可以通过函数 $f(x)=\frac{b-x}{x-a}$ 取特定的值而得到，把上述特定的函数值进行排序，得到：

$$\frac{b-Q}{Q-a}=\frac{Q+a}{b+Q}<1=\frac{b-A}{A-a}=\frac{b}{b}<\frac{b}{G}=\frac{b-G}{G-a}<\frac{b}{a}=\frac{b-H}{H-a},$$

再由比例的性质有

$$\frac{b}{Q-a}<\frac{b}{A-a}<\frac{b}{G-a}<\frac{b}{H-a},$$

故有 $Q>A>G>H$.

3.3 从几何上说明

古希腊人为了克服无理数的困扰，对线段比十分热衷. 平行线分线段成比例定理更是相似三

角形的基础. 由此，可以得到上述不等式链的几何说明.

如图 1，四边形 $ABCD$ 为梯形，其中 $AB=a$，$DC=b$（不妨设 $a<b$），设 O 为对角线 AC 与 BD 的交点，$EF/\!/DC$，GH 为梯形的中位线，$KL/\!/DC$ 且使得梯形 $ABLK\backsim$ 梯形 $KLCD$，$IJ/\!/DC$ 且 IJ 是梯形 $ABCD$ 的等分面积线段.

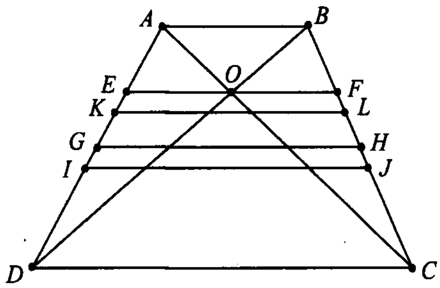

图 1

(1)分别计算线段 EF，GH，KL，IJ 的长度.

① 因为 $\triangle ABO\backsim\triangle CDO$，则 $\dfrac{AO}{OC}=\dfrac{BO}{OD}=\dfrac{a}{b}$，

所以由 $EF/\!/DC$ 得，$EO=FO=\dfrac{ab}{a+b}$，

即 $EF=2EO=\dfrac{2ab}{a+b}$.

② 因为梯形 $ABLK\backsim$ 梯形 $KLCD$，

所以 $\dfrac{AB}{KL}=\dfrac{KL}{DC}$，即 $KL=\sqrt{ab}$.

③ GH 为梯形中位线，则 $GH=\dfrac{a+b}{2}$.

④ 如图 2 计算 IJ 的长度，延长 CB 与 DA 交于点 M.

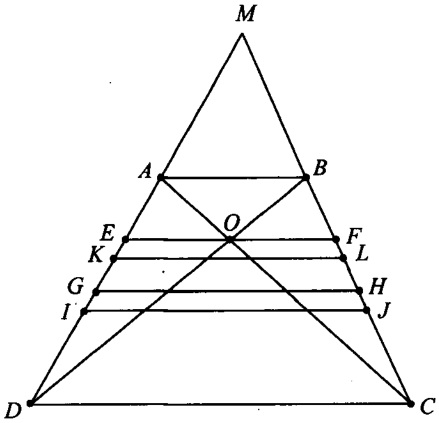

图 2

设 $S_{\triangle MAB}=m$，$S_{梯形ABJI}=n$，由于 $\triangle MAB\backsim\triangle MIJ$，得 $\dfrac{S_{\triangle MAB}}{S_{\triangle MIJ}}=\left(\dfrac{AB}{IJ}\right)^2$，即 $\left(\dfrac{a}{IJ}\right)^2=\dfrac{m}{m+n}$，

同理得 $\dfrac{S_{\triangle MAB}}{S_{\triangle MDC}}=\left(\dfrac{AB}{DC}\right)^2$，即 $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2=\dfrac{m}{m+2n}$，

联立两个等式得到 $IJ=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$.

(2)研究线段 EF，GH，KL，IJ 在梯形 $ABCD$ 中的位置.

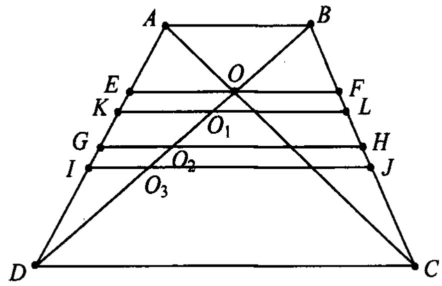

图 3

如图 3，设线段 KL 与线段 BD 交于点 O_1，线段 GH 与线段 BD 交于点 O_2，线段 IJ 与线段 BD 交于点 O_3.

因为梯形 $ABLK\backsim$ 梯形 $KLCD$，所以 $\dfrac{BO_1}{O_1D}=\dfrac{BL}{LC}=\dfrac{AB}{KL}=\dfrac{a}{\sqrt{ab}}$，又因为 $\dfrac{BO}{OD}=\dfrac{a}{b}$，$\dfrac{BO_2}{O_2D}=1$，$\dfrac{a}{b}<\dfrac{a}{\sqrt{ab}}<1$，得到线段 EF，KL，GH 在梯形 $ABCD$ 中由上至下分布，又梯形 $ABHG$ 面积小于梯形 $ABJI$ 面积，所以 $GH<IJ$.

综上，$\dfrac{2ab}{a+b}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\dfrac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$.

4　分析与讨论

在上述过程中能够看到，采取的主体思路是：以定比分点公式为主线串通均值不等式链. 通过算术平均数的定义引入定比分点公式的表示，猜想定比分点公式可以推导出调和平均数、几何平均数和平方平均数；把握三种平均数的特点，利用常数变易和分式变换两条变换路线进行推导；说明均值不等式链中的各种平均数都可以通过定比分点公式而得到. 最后从函数、几何的角度再次认识均值不等式链.

在这个过程中，体现了以“一线串通”的方式，

多方向多维度对均值不等式进行探索.在探索的过程中,从定比分点的角度,深刻理解四种平均数的概念以及平均数之间的不等关系,将定比分点与平均数的来源与概念融合,进行层次性的变换;将不等关系从数过渡到线段中的定比分点,进行维度的升华,体现了数学的渐变性与统一性;同时也建构了几何与代数、函数与不等式之间的桥梁,增添了课程的趣味性与深度.

对教材进行深度分析是教师的基本功之一.有两条基本路径.其中一条是对已有的文本进行多角度的理解,或者是从高观点解读、或者是从多角度解读、或者是从横向关联的角度进行解读.其目的在于"理解数学",把已有文本后面的数学的精神、思想、方法揭示出来,让学生获得不一样的体会.第二种路径是就通过探究来理解教材,就如进攻是最好的防御一样,做数学探究也是一种理解教材的好方式.

数学的本质是自由,数学教学是培养创造性思维的舞台,在大学课堂教学中更应如此.本课例是在课堂教学中,通过教基本知识,以一线串通相关知识,举一反三思考问题而产生的一个思考结果.通过研究深化了学生对均值不等式链的理解,更为重要的是培养了学生创造性的思维,导引了他们的思考.

参考文献

[1]汪晓勤,郭锦融.古希腊数学中的均值不等式[J].中学数学月刊,2015(2):54-56

[2]章建跃.章建跃教育随想录[M].杭州:浙江教育出版社,2017

[3]邓卫平.几何平均数与调和平均数那点儿事[J].调研世界,2013(8):64-65

(上接第13页)

性质),就是与特殊向量相关的运算、两个有特殊关系的向量的运算所表现的特殊性;

向量基底表示向量中体现的数学思想,特别是单位正交基的使用;

向量法——先用几何眼光观察,再用向量法解决;等等.

6.6 加强用"几个一般定理"解决问题的训练

向量的加法法则、数乘向量、向量的数量积和向量基本定理等几个"一般定理"的灵活应用需要一定的训练,要让学生养成用向量思考和解决几何问题的习惯.

三角形、平行四边形是最基本的几何图形,平行、垂直是最基本的关系,几个"一般定理"是对这些基本图形和基本关系的向量表达.要注意利用这几个"一般定理",加强用向量的语言和方法处理平面几何中基本问题的训练.例如,线段的定比分点,余弦定理、正弦定理的发现与证明,三角形的"心"的性质,平行四边形中边、对角线之间的关系,等等.

6.7 关于投影向量

投影向量是本次课标修订中引入的概念.

投影向量是与向量垂直有关的概念.如图9,$\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{ON}=\boldsymbol{b}$.过点 M 作直线 ON 的垂线,垂足为 M_1,则 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{M_1M}$,其中 $\overrightarrow{OM_1}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线,$\overrightarrow{M_1M}\perp\boldsymbol{b}$.可以发现,$\overrightarrow{OM_1}$ 与 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 都有关系,这是需要研究的.

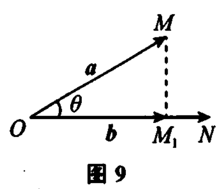

图9

设与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同的单位向量为 $\boldsymbol{e}$,$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ.当 θ 为锐角时,容易得到 $\overrightarrow{OM_1}=|\boldsymbol{a}|\cdot\cos\theta\boldsymbol{e}$.而 θ 的取值范围是0到 π,可以验证 θ 为直角、钝角以及 $\theta=0$,$\theta=\pi$ 时此式仍然成立.

由数量积的定义可得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}=|\boldsymbol{a}|\cos\theta$,所以 $\overrightarrow{OM_1}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e})\boldsymbol{e}$,此式揭示了投影向量与向量数量积的联系.

$|\overrightarrow{OM_1}|$ 是点 O 到直线 MM_1 的距离,而 $|\overrightarrow{OM_1}|=|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}|$,这是用向量方法推导点到直线的距离公式的依据.

参考文献

[1]史宁中.数形结合与数学模型——高中数学教学中的核心问题[M].北京:高等教育出版社,2018,7

[2]章建跃,李增沪主编.普通高中教科书·数学(必修)第二册[M].北京:人民教育出版社,2019

[3][德]F·克莱因.高观点下的初等数学(二)[M].舒湘芹,等,译,上海:复旦大学出版社,2008,9