

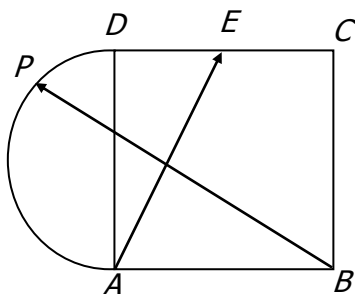
江苏省仪征中学 2020 届高三年级第一学期 B 版午间 “3+1” (30)

2019 年 11 月 21

班级_____姓名_____学号_____评价_____

请将填空题答案填在横线上，并将每个题目的解答过程写在题目下方。

1. 如图，已知正方形 $ABCD$ 的边长是 2， E 是 CD 的中点， P 是以 AD 为直径的半圆上任意一点，则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BP}$ 的取值范围是_____。



2. 设 $a > 0$ ，函数 $f(x) = x + \frac{a^2}{x}$ ， $g(x) = x - \ln x$ ，若对任意的 $x_1, x_2 \in [1, e]$ ，

都有 $f(x_1) \geq g(x_2)$ 成立，则实数 a 的取值范围为_____。

3. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -|x^2 + 2x|, & x \leq 0 \\ \ln x, & x > 0 \end{cases}$ ，若函数 $g(x) = f(x) - x + b$ 有三个零点，则实数 b 的取值范围是_____。

4. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c ，且满足 $a = 3b \cos C$ 。

(1) 求 $\frac{\tan C}{\tan B}$ 的值；(2) 若 $a = 3$ ， $\tan A = 3$ ，求 $\triangle ABC$ 的面积。

答案

1. $[-\sqrt{5}, 2]$

2. $a \geq \sqrt{e-2}$

3. $b > 1$ 或 $0 \leq b < \frac{1}{4}$

4. 解: (1) $\because a = 3b \cos C$, $\therefore$ 由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ 得,

$$2R \sin A = 3 \times 2R \sin B \cos C \quad \text{即} \quad \sin A = 3 \sin B \cos C. \quad \because A + B + C = \pi,$$

$$\therefore \sin A = \sin(B + C) = 3 \sin B \cos C,$$

$$\therefore \sin B \cos C + \cos B \sin C = 3 \sin B \cos C,$$

$$\therefore \cos B \sin C = 2 \sin B \cos C, \quad \therefore \frac{\cos B \sin C}{\sin B \cos C} = 2 \quad \text{即} \quad \frac{\tan C}{\tan B} = 2$$

(2) 由 $A + B + C = \pi$, 得 $\tan(B + C) = \tan(\pi - A) = -3$,

即 $\frac{\tan B + \tan C}{1 - \tan B \tan C} = -3$, 将 $\tan C = 2 \tan B$ 代入得

$$\frac{3 \tan B}{1 - 2 \tan^2 B} = -3, \quad \text{解得} \quad \tan B = 1 \text{ 或 } \tan B = -\frac{1}{2}.$$

根据 $\tan C = 2 \tan B$, 得 $\tan C, \tan B$ 同号,又 $\tan C, \tan B$ 同时为负数不合题意,

$$\therefore \tan B = 1, \quad \tan C = 2,$$

$$\therefore \sin B = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin C = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \quad \sin A = \frac{3\sqrt{10}}{10}, \quad \text{由正弦定理可得}$$

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} = \sqrt{10},$$

$$\therefore b = \sqrt{5}, \quad c = 2\sqrt{2}, \quad \therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} \times 3 \times \sqrt{5} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} = 3.$$