利用几何图形建立直观通过代数运算刻画规律

——“平面向量及其应用”内容分析与教学思考

章建跃

（人民教育出版社 课程教材研究所 100081）

关于数与形的联系，华罗庚先生有诗曰：

数与形

本是相倚依

焉能分作两边飞

数缺形时少直观 形缺数时难入微

数形结合百般好 隔离分家万事休

切莫忘

几何代数统一体 永远联系莫分离

这说明，当我们把数、形统一起来考虑时，对这两者的认识都会变得更深刻；否则，将两者孤立起来，那么数与形都不会走得太远.“现代数学强调用代数的方法研究几何，其本质是通过几何图形建立直观，通过代数运算刻画规律.”([1]，p.40)

以往高中数学课程都是将代数与函数放在一起.与此不同，《普通高中数学课程标准(2017年版)》首次设置了“几何与代数”内容主线，必修内容包括平面向量、复数和立体几何初步，选择性必修内容包括空间向量与立体几何、平面解析几何.如此设置的理由，“一是为代数、特别是线性代数的学习建立几何直观，这个几何直观对于学生的未来学习是非常重要的；二是让学生知道如何用代数运算解决几何问题，这是现代数学的重要研究手法.”([1]，p.51)

显然，要使数与形结合起来，需要桥梁，需要有数形结合的研究工具.笛卡尔发明了直角坐标系，成功地在数与形之间搭建了桥梁，而向量概念的建立，则使我们有了“集数与形于一身的数学研究工具”.正如课程标准指出：向量理论具有深刻的数学内涵、丰富的物理背景.向量既是代数研究对象，也是几何研究对象，是沟通几何与代数的桥梁.向量是描述直线、曲线、平面、曲面以及高维空间数学问题的基本工具，是进一步学习和研究其他数学领域问题的基础，在解决实际问题中发挥重要作用.

下面我们从平面向量开始讨论几何与代数主线的内容.

1 课程定位

课程标准认为，本单元的学习，可以帮助学生理解平面向量的几何意义和代数意义；掌握平面向量的概念、运算、向量基本定理以及向量的应用；用向量语言、方法表述和解决现实生活、数学和物理中的问题.本单元的内容包括：向量概念、向量运算、向量基本定理及坐标表示、向量应用.

分析课程标准的上述表述，可以得出如下认识：

第一，向量是描述几何图形的基本工具，首先应让学生理解这是一种怎样的工具，掌握它的语言、方法；

第二，向量是一种量，类比数量的研究经验，需要研究它的运算，有了运算才能用来刻画几何对象，否则它就只是一个“路标”；

第三，几何图形组成元素的相互关系(位置关系、大小关系)就是它的基本性质，所以如何用向量表示几何基本元素是首先要解决的问题，这就是向量基本定理及其坐标表示关注的问题；

第四，向量应用范围非常广泛，但在高中，学习用向量法解决几何问题是基本任务.

2 内容与要求

2.1 向量概念

(1)通过对力、速度、位移等的分析，了解平面向量的实际背景，理解平面向量的意义和两个向

量相等的含义.

(2)理解平面向量的几何表示和基本要素.

2.2 向量运算

(1)借助实例和平面向量的几何表示,掌握平面向量加、减运算及运算规则,理解其几何意义.

(2)通过实例分析,掌握平面向量数乘运算及运算规则,理解其几何意义.理解两个平面向量共线的含义.

(3)了解平面向量的线性运算性质及其几何意义.

(4)通过物理中功等实例,理解平面向量数量积的概念及其物理意义,会计算平面向量的数量积.

(5)通过几何直观,了解平面向量投影的概念以及投影向量的意义.

(6)会用数量积判断两个平面向量的垂直关系.

2.3 向量基本定理及坐标表示

(1)理解平面向量基本定理及其意义.

(2)借助平面直角坐标系,掌握平面向量的正交分解及坐标表示.

(3)会用坐标表示平面向量的加、减运算与数乘运算.

(4)能用坐标表示平面向量的数量积,会表示两个平面向量的夹角.

(5)能用坐标表示平面向量共线、垂直的条件.

2.4 向量应用与解三角形

(1)会用向量方法解决简单的平面几何问题、力学问题以及其他实际问题,体会向量在解决数学和实际问题中的作用.

(2)借助向量的运算,探索三角形边长与角度的关系,掌握余弦定理、正弦定理.

(3)能用余弦定理、正弦定理解决简单的实际问题.

可以发现,课程标准按照"背景——概念——运算——联系——应用"的结构给出内容和要求,逻辑清晰、要求明确.

3 本单元的认知基础分析

本单元内容对学生而言是全新的,"既有方向又有大小的量"在以往的数学学习中没有正式接触过,但他们从许多途径积累了学习向量所需要的认知基础.无论对教材编写还是对教学,追溯一个数学内容的认知基础,都是为了明确教学的出发点.因此,我们应把它放到其所在的知识系统中进行分析.

从哪些角度分析本单元的认知基础呢?显然,我们应该从向量这个研究对象的特点入手.

首先,向量是代数研究对象,所以代数学习中积累的知识经验是向量的认知基础之一,具体而言是运算对象的抽象与表示、运算体系的建立、通过运算解决问题的思想方法.所以,本单元内容的处理要始终强调通过类比数及其运算学习向量及其运算.

第二,向量是几何研究对象,所以在几何学习中积累的知识经验是向量的另一个认知基础,具体而言是几何对象的抽象与表示、图形性质的内涵与发现等等.特别是,向量运算法则、运算律都有明确的几何意义,而且是以平面几何的相关定理作为逻辑基础的.例如,向量加法的定义、交换律以平行四边形的性质定理为基础,数乘向量的分配律以相似三角形的性质定理为基础,数量积的定义、运算律以勾股定理(余弦定理)为基础等等.

第三,向量集数与形于一身,所以在研究过程中始终要从数与形两个角度考虑,从向量的表示,到向量的运算定义和性质,都是如此.向量是一个数形融合的工具,在应用向量解决问题时(高中阶段主要是几何问题,如推导正弦定理、余弦定理等),具有独特优势,但这是学生以往经验中不具备的.所以,"向量法"的奥秘需要我们有意识地引导学生加强体验.

第四,学生初次接触用向量的语言表示几何中的定性关系(例如直线、平面的平行、垂直)、定量关系(例如比例关系、三角形定理、平行四边形定理),对于其中蕴含的数学思想需要在解决问题的过程中逐步领会.学习语言的最好方法就是用语言去表达,要通过适当的解题训练,让学生形成用向量语言表达数学问题的习惯.

第五,向量的概念、运算都有明确的物理背景,力、速度、位移、功等都是学生已经学习过的,这为本章的学习打下了很好的基础.

4 内容的理解与教学思考

4.1 向量是一个怎样的数学对象

理解研究对象是数学学习的首要一环,我们常说“理解基本概念”,其含义首先是理解研究对象.

课程标准指出,向量既是代数研究对象,也是几何研究对象.由此,我们可以从这两种对象的特征入手做一些分析.

首先,几何对象是图形(点、线、面、体)和图形的关系.向量作为几何对象,主要是向量的几何表示,用向量的语言表示空间图形的概念、性质、关系和变换等,这就赋予了向量的几何属性.

其次,代数对象是数量和数量关系,代数的核心是运算.向量作为代数对象,是指向量作为一个运算对象,就要研究关于向量的运算法则和相应的运算律,以及通过向量运算解决数学和现实的问题.

4.2 向量是怎样的基本工具

课程标准认为,向量是描述几何图形的基本工具,这个工具有什么特点呢?

首先,向量集数与形于一身,因此数形结合成为它的内在之意.利用它可以方便地为代数(特别是线性代数)建立几何直观,同时也可以通过代数运算(向量运算)研究几何规律.因此,向量是数学研究中的一个基本工具.

其次,向量集大小与方向于一身,为解决数学中最本质的问题——度量,包括长度、角度,提供了有用、好用的工具.

第三,向量及其运算都有明确的物理背景,所以也是解决实际问题的重要工具.

4.3 如何构建向量的研究路径

尽管向量也是几何研究对象,但对它的研究是按代数对象的研究路径展开的,在此过程中通过对向量运算、运算律的几何意义的研究以及用于解决几何问题来体现其几何属性:背景引入——向量的概念与表示——向量的运算、运算律及其几何意义——向量基本定理及坐标表示——向量应用.其中,向量基本定理处于向量理论与应用的联结点位置.

4.4 关于向量概念的教学

(1)引入向量概念要注意什么?

数学概念的引入要讲背景.向量概念的引入,背景材料的选择上要注意如下几点:

典型性:位移、力、速度是典型的、学生熟悉的既有大小也有方向的量;

丰富性:要尽量举不同领域的例子;

比较性:为了使概念清晰、可辨,比较是一个好方法,所以要提供比较对象,这里是以数量为比较对象,通过比较领悟向量的要素.

(2)向量概念的抽象要完成哪些事?向量的表示要“表示”什么?

这是向量概念教学要考虑的基本问题.向量概念的抽象按“共性特征的归纳——定义——表示——基本性质”的套路进行:

定义,要给出向量的内涵,规定向量相等的含义.这里,通过定义明确研究对象的内涵,由此可以判断一个元素是否属于研究对象的集合.对于一个集合,我们要求其元素具有互异性,但对集合中的元素个体而言,其具体属性是多样化的,因此必须在定义对象的时候明确“相等”或“相同”的含义,由此也清楚了我们到底关心什么.由向量相等的定义知道,我们最关心的是“大小”和“方向”.我们知道,对线段、角的度量是几何的本质所在,而向量的大小本质上就是线段的长度,两个向量的方向差别就是它们所成角的大小,向量的这种特性使向量成为表示几何图形的基本工具.

表示,因为向量的要素有大小和方向,因此要用集大小和方向于一身的数学符号,而且要有几何和代数两种表示,有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 和代数符号 $\boldsymbol{a}$ 及其手写体 $\vec{a}$ 是数学共同体的约定.

向量的基本性质,在定义一个研究对象时,我们总是要通过对基本性质的研究,进一步认识这个研究对象.“基本性质”是指对象要素之间的基本关系.这里可以引导学生思考:数的基本性质就是数的大小关系,向量的基本性质是什么?

从“大小”看,就是向量长度的大小,与数的大小关系类似,所以不必专门研究;

从“方向”看,由“特殊关系”入手(这是讨论基本性质的基本着眼点),有“同向”、“反向”和垂直,得到平行向量、共线向量等关系.

归纳起来,向量概念的教学就是要让学生完成①定义向量概念,②认识“平面向量集合”中的元素,可以概括为如下流程:

现实背景(力、速度、位移等)——定义——表

示(图形、符号、方向、大小)——特例(零向量、单位向量)——性质(向量与向量的关系,相等是最重要的关系;重点考虑"方向",得出平行向量、共线向量、相反向量等).

(3)为什么"向量是自由的"?

向量刻画了现实事物的两个最基本属性——大小和方向,两个向量如果方向相同,那么它们平行,而平行具有可传递性,所以向量可以"自由平移".自由的向量才有力量!例如,如果向量不自由,那么"三角形法则"和"平行四边形法则"就无法统一.由向量"自由性",我们可以把向量平移,使所有向量的起点都与原点重合,这就可以使向量进一步代数化,将给问题的讨论带来方便.

4.5　定义向量运算应遵循怎样的原则

如何定义带有方向的量的运算?

类比数及其运算的研究,引进一种量就要定义运算,定义一种运算就要研究运算律.

根据定义数的运算的经验,定义一种运算要讲合理性,具体体现在两个方面:数学内部的和谐性,即要符合运算的一般规律;与现实背景相吻合,即要反映现实中相应事物的规律性.

显然,定义向量运算法则的关键是定义"方向的运算".在有理数的学习中,学生已经有这样的经验:定义有理数运算的关键是解决"符号法则",例如"负负得正"、"正负得负",而"符号"实际上代表了方向,只不过是两种特定的方向——相反方向;有理数的加减可以统一为加法,其根源是数带有符号,其本质可以归结为数轴上的向量运算:$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$,其中 A,B,C 为数轴上的点.因此,数的运算中的符号法则对定义向量运算法则既有启发性,同时,共线向量的运算应该与数的运算保持和谐.

另一方面,位移、速度、力等是向量的现实背景,位移的合成、物体受力做功等反映了现实事物运动变化的客观规律性,定义向量运算法则应该与这些规律具有一致性.正因为如此,在定义向量运算法则时我们总是从相应的物理背景出发,从中得到启发并给出定义.

4.6　关于向量的加减

(1)如何说明向量加减运算法则的合理性?

定义向量的加减运算,关键是解决"方向的加减".对照物理背景可知,加法的最佳背景是位移的合成、力的合成,分别对应于三角形法则和平行四边形法则;减法的最佳背景是物体受力平衡.

因为向量线性运算结果仍然是向量,所以要结合运算的物理背景,加强运算法则和运算律的代数表示和几何意义.例如,结合力的合成和物体受力平衡看向量的加减运算:如图 1,设 $\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OB}$ 是加在物体 O 上的两个力,由力的平行四边形法则,有

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC},$$

其中 OC 是 $OACB$ 的对角线.这个法则表明,将两个力 $\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OB}$ 施加到一个物体上,那么这个物体受到的力是大小和方向为 $\overrightarrow{OC}$ 的力.这就是向量加法平行四边形法则的物理背景,这也说明向量加法的平行四边形法则与客观世界的规律性是无矛盾的.

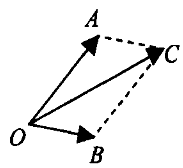

图 1

这个法则的合理性也可以从几何上进行说明,只要将 $\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OB}$ 向 $\overrightarrow{OC}$ 作垂直投影(因为 $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AC}$,所以相当于作 A 点在 $\overrightarrow{OC}$ 上的投影),那么两个投影向量之和与 $\overrightarrow{OC}$ 相等.

进一步的,考虑物体 O 的受力平衡.显然,这时需要有第三个力,这个力与 $\overrightarrow{OC}$ 大小相等、方向相反.类比数的减法,先通过加法定义相反数,再利用相反数定义减法(实际上是把减法归结为加法),我们先定义与向量 $\boldsymbol{a}$ 的大小相等方向相反的向量为 $\boldsymbol{a}$ 的相反向量,记为 $-\boldsymbol{a}$.这个定义的物理模型就是力的平衡原理:如图 2,两个力 $\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OB}$ 的合力为 $\overrightarrow{OC}$,与 $\overrightarrow{OC}$ 大小相等、方向相反的力为 $-\overrightarrow{OC}$,这时物体 O 达到受力平衡可以表示为

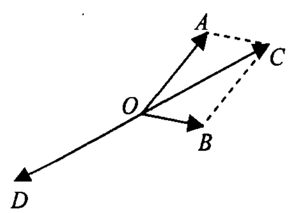

图 2

$$(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})-\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}.$$

由此可以得到:

$$\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}.$$

由图 2 还可得:

$$\overrightarrow{OC}+(-\overrightarrow{OB})=\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}+(-\overrightarrow{OA})=\overrightarrow{OB}.$$

于是

$$\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}+(-\overrightarrow{OB}),$$
$$\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}+(-\overrightarrow{OA}).$$

所以,把向量减法定义为"减去一个向量等于加上它的相反向量",符合数学内部的和谐性、与客观世界规律无矛盾的要求.

根据向量加法、减法的定义,对于$\triangle ABC$,我们有:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}\Rightarrow\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}=\mathbf{0}$$
$$\Rightarrow\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\mathbf{0}.(*)$$

上述(*)式称为"三角形回路",可以推广为

$$\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{B_2B_3}+\cdots+\overrightarrow{B_nA}=\mathbf{0},$$

这一"向量回路"在解决几何问题时有基本的重要性.

(2)如何引导学生发现和提出运算性质?

学生对运算律是熟悉的,但他们可能并不知道为什么一定要研究运算律,对其重要性没有多大感觉.究其原因,一是运算律基本上就是"常识",属于不学也会的知识;二是其重要性要在代数的理论构建中才能显示出来,对学生而言还没有到这个时候.对于这种观念性的东西,教师要从数学的严谨性角度加强引导.

运算性质与运算对象的特征有直接关系.因为向量有大小(代数)和方向(几何)两个要素,所以运算性质也要从代数和几何两个方面来考虑.

首先,类比数的加法运算律,容易想到向量加法的交换律、结合律,利用定义就可以验证.教学实践表明,有的学生不知道到底要验证什么,他们往往机械地画出两个图形(如图3):

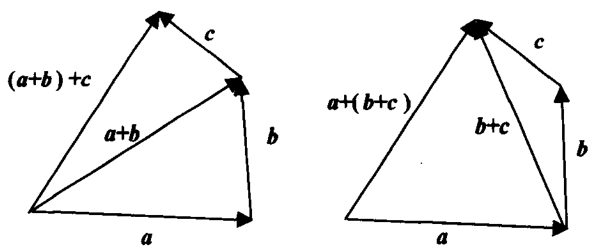

图3

另外一点是学生不太清楚加法的交换律与平行四边形性质之间的逻辑关系(其实有的老师也不清楚),这里要让学生思考一下这个问题,使他们明确,加法交换律是平行四边形性质的代数表示.也就是说,交换律的成立是以平行四边形性质为逻辑基础的:如图4,根据平行四边形的性质,有

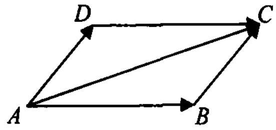

图4

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC},\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}.$$

由向量加法定义,有

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}.$$

所以

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}.$$

这里再次强调,因为向量集大小与方向这两个最基本的几何要素于一身,所以向量运算及其运算律也必然反映了最基本的几何性质,因此向量是描述和研究几何图形的基本工具.对此,人教A版在本单元的小结中进行了总结.形成这样的观念是具备数学学科核心素养的表现,教师应有意识地进行引导.

对运算律几何意义的考察,立足点在运算.直接从几何角度看运算,可以从两个向量的特殊关系入手,发现如下问题值得研究:共线向量的加法有什么特殊性,不共线时有什么几何特征.

对于共线向量的加法,实际上和实数的"代数和"完全一致,人教A版让学生自己探究这个问题,可以培养学生联系的观点、分类讨论的能力.

当$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$不共线时,$|\boldsymbol{a}|,|\boldsymbol{b}|,|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$构成三角形的三边,可得三角形不等式.

4.7 数乘向量

(1)数乘向量运算律的逻辑基础是什么?

数与向量相乘,是两个不同数学对象之间的运算,运算结果是向量.也就是说,这里的"主角"是向量,为什么呢?

类比"自然数的乘法是自相加的缩写",可以提供直观背景:n个向量$\boldsymbol{a}$相加的和定义为$n\boldsymbol{a}$,即

$$n\boldsymbol{a}=\underbrace{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}+\cdots+\boldsymbol{a}}_{n个},(n+1)\boldsymbol{a}=n\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}.$$

另外,$(-n)\boldsymbol{a}=n(-\boldsymbol{a})=-(n\boldsymbol{a})$,这可以根据相反向量的意义进行说明.

由上述定义,可以验证下列运算律:

Ⅰ. $m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{a}=(m+n)\boldsymbol{a}$;

Ⅱ. $m(n\boldsymbol{a})=(mn)\boldsymbol{a}$; (*)

Ⅲ. $n\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}=n(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}\neq 0$，$n$ 等分 $\overrightarrow{AB}$，$B_i\{i=1,2,\cdots,n-1\}$为等分点，那么

$\overrightarrow{AB_1}=\overrightarrow{B_1B_2}=\overrightarrow{B_2B_3}=\cdots=\overrightarrow{B_{n-1}B}$，

$n\overrightarrow{AB_1}=\overrightarrow{AB}$.

所以，可以定义 $\frac{1}{n}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB_1}$，它是使 $n\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$ 成立的唯一解. 然后我们可以定义

$$\frac{m}{n}\boldsymbol{a}=m\left(\frac{1}{n}\boldsymbol{a}\right)=\frac{1}{n}(m\boldsymbol{a}).$$

在上述定义下，可以证明运算律(*)依然成立.

最后，像从有理数集拓展到实数集一样，我们可以将数的范围扩展到实数，得到 $\boldsymbol{a}$ 的任意实数倍 $\lambda\boldsymbol{a}$，而且运算律(*)仍然成立.

这里要特别提醒注意，运算律 $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$，它的本质就是相似三角形对应边成比例定理的代数化形式：

令 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BC}$，则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}$. 如图 5，$\triangle ABC\backsim\triangle A_1B_1C_1$，$A=A_1$，相似比为 λ，那么

$\overrightarrow{AB_1}=\lambda\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{B_1C_1}=\lambda\boldsymbol{b}$，

$\overrightarrow{AC_1}=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

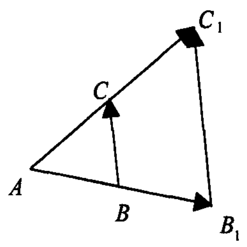

图 5

所以，数乘向量分配律的逻辑基础是相似三角形定理.

(2)如何理解向量共线定理?

人教 A 版先给出向量共线定理：

设 $\boldsymbol{a}$ 是非零向量，则向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线的充要条件是存在唯一一个实数 λ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

然后说：设非零向量 $\boldsymbol{a}$ 位于直线 l 上，那么对于 l 上的任意一个向量 $\boldsymbol{b}$，都存在唯一一个实数 λ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$. 也就是说，位于同一直线上的向量可以由位于这条直线上的一个非零向量表示. ([2]，p. 15)

实际上，这就是“一维向量基本定理”. 在此基础上，我们可以给出相应的坐标表示，这与平面向量基本定理及坐标表示是一样的.

一维向量的坐标表示：设 $\boldsymbol{e}$ 是与数轴 Ox 的方向相同的单位向量，$\boldsymbol{a}$ 是数轴 Ox 上的一个任意向量，那么根据基本定理，存在唯一实数 λ，使 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{e}$. 这样，以 $\boldsymbol{e}$ 为基底，直线 Ox 上的任一向量 $\boldsymbol{a}$ 都可以由一个实数 λ 唯一确定，这个 λ 就称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的一维坐标. 设 $\overrightarrow{OA}=\lambda\boldsymbol{e}$($O$ 为原点，A 在数轴上)，则 $\overrightarrow{OA}$ 的坐标就是终点 A 的坐标；反之，数轴上点 A 的坐标 λ 也就是向量 $\overrightarrow{OA}$ 的坐标. 因为 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，所以终点 A 的坐标 λ 就是向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标. 这样就建立了一维向量的坐标与数轴上点的坐标之间的联系：设 $\overrightarrow{AB}=x\boldsymbol{e}$，$\overrightarrow{BC}=y\boldsymbol{e}$，那么 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}=(x+y)\boldsymbol{e}$.

因为一维向量基本定理及其坐标表示非常直观，人教 A 版为了削支强干而没有详细讨论这一内容. 但教学中可以让学生研究一下这个内容，让他们通过数轴上的单位向量，建立数轴上的向量与数轴上点的坐标之间的一一对应关系，既作为共线向量定理的应用，又为平面向量的坐标表示打下基础.

4.8　向量的数量积

从前面的讨论可以看到，向量的线性运算有实数运算的“影子”，共线向量的线性运算本质上就是实数的运算，但两个向量的乘法与数的乘法差异很大. 数学中定义了两种向量乘法，一种是向量的数量积(也称内积、点乘)，结果是一个实数；一种是向量的矢量积(也称外积、叉积)，结果是一个向量. 它们都有明确的物理意义和几何意义.

(1)如何理解数量积运算法则的合理性?

向量数量积的物理背景是力对物体做功，即力 $\boldsymbol{F}$ 作用在物体上，并使物体在力的方向上产生位移 $\boldsymbol{s}$，这个力对物体做了功，其大小是 $W=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos\theta$，其中 $\boldsymbol{F}\cos\theta$ 是力 $\boldsymbol{F}$ 在位移 $\boldsymbol{s}$ 方向上的投影，θ 是向量 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 的夹角.

受此启发，定义向量的数量积概念：两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，它们的夹角为 θ，把数量 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积，记为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta.$$

规定：零向量与任一向量的数量积为 0.

显然，$|\boldsymbol{a}|\cos\theta$ 是向量 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 方向上的投影，$|\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 是向量 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 方向上的投影.

数量积的上述定义，与物理规律相吻合，与数的乘法法则也不矛盾：

设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是共线向量，那么 $\theta=0$ 或 π. $\theta=0$ 时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$；$\theta=\pi$ 时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$. 这与“同号两数相乘得正，异号两数相乘得负”是异曲同工的.

(2)如何研究数量积的几何意义?

从定义可以直接发现,数量积的几何意义表现在向量的长度和夹角两个方面.如何研究几何意义呢?与研究向量线性运算的几何意义一样,我们从特殊情形(要素的特殊化、关系的特殊化)入手.观察定义,特殊情形包括:

①两个向量有一个取"特殊值"单位向量,如$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}$,则有

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}=\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\theta,$$

这实际上就是一个向量在另一个方向上投影的数量.

②两个向量的方向有特殊关系,包括

i)当$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$时,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$;

ii)当$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$同向时,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$;当$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$反向时,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$.特别地,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$或$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$,这里实际上已经给出了距离公式.

③由定义可得

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\sqrt{\boldsymbol{a}^2}\cdot\sqrt{\boldsymbol{b}^2}},$$

这实际上就是余弦定理.由$|\cos\theta|\leqslant 1$还可以得到

④$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$,这就是三角形不等式.

⑤我们对数量积做如下变形(要用分配律):

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}\{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2-\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2\},$$

这里$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$是三角形的三边.由此可见数量积与三角形的三条边长$|\boldsymbol{a}|,|\boldsymbol{b}|,|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$之间的关系.

(3)数量积的运算律有什么重要意义?

类比数的乘法运算律,可以提出数量积是否也有运算律的问题.已知向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$和实数$\lambda$,由向量的数量积定义可以推出下面的运算律:

①$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$;

②$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$;

③$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$.

运算律的证明不难,关键是要让学生在运用中逐步明白它们的价值.例如,利用分配律可以得到:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=2\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{b}^2,$$

这是平行四边形的一条性质,用向量数量积的分配律非常容易地得到了证明.而用向量法研究几何图形的度量性质,主要依靠数量积的分配律.

4.9 向量基本定理及坐标表示

(1)向量基本定理"基本"在哪里?

在中学数学里,冠以"基本"的定理不多见,足见这一定理的重要性.如前所述,因为这一定理给出了用向量表示平面上任意一点的充要条件,所以从理论上讲,我们就可以凭借它将平面图形的基本元素作出向量表示,这样就可以通过向量运算解决任何几何问题.

利用向量表示空间基本元素,将空间的基本性质和基本定理的运用转化成为向量运算律的系统运用,其要点是:

点——根据向量的自由性,选平面内的一个点O为"基准点",以O为向量的起点,这时就可以建立起向量的终点与平面内的点之间的一一对应关系.当然,这个对应与O点的选取有关,如图6:

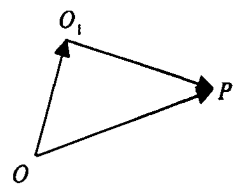

图 6

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OO_1}+\overrightarrow{O_1P}.$$

直线——一个点A、一个方向$\boldsymbol{a}$就定性刻画了一条直线.引进数乘向量$k\boldsymbol{a}$,那么直线上任意一个点就可以用实数定量表示,进而得到一维向量的坐标表示.

平面——一个点A、两个不平行(非$\mathbf{0}$)向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$在"原则"上确定了平面(定性刻画,这与"两条相交直线确定一个平面"有异曲同工之效),因此把$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\}$叫做平面的一个基底.引入向量的加法$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,结合数乘向量(向量伸缩),平面上的任意一点$X$就可以表示为$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$,从而成为可定量运算的对象.

(2)给定一个基底,平面上的任意一个向量就可以由它唯一表示.怎样的基底更好用?

设$\{\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y\}$是一个单位基底,$\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y$的夹角为$\theta$.我们有

$$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y.$$

如果$\theta\neq\frac{\pi}{2}$,那么x,y的表达式会比较复杂,不利于计算;如果$\theta=\frac{\pi}{2}$,则有:

$$x=\overrightarrow{OP}\cdot\boldsymbol{e}_x,\ y=\overrightarrow{OP}\cdot\boldsymbol{e}_y,$$

这就可以把点的向量表示和平面直角坐标系中的

有序数对建立一一对应关系. 也就是说,在平面直角坐标系中,我们不但可以用坐标(x,y)标记平面上点的位置,而且也可以用坐标表达平面上的向量:

在 x 轴、y 轴上分别取与坐标轴方向相同的单位向量$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$,以$\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}\}$为基底,这时我们有

$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=1,\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}=0.$

如图 7 所示,对坐标平面内的任意一个向量$\boldsymbol{a}$,因为向量是自由的,所以可以想象它的起点在原点. 由向量基本定理可知,有且只有一对实数 x,y,使得 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$.

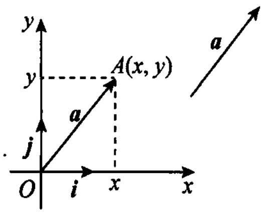

图 7

这样,平面内的任一向量 $\boldsymbol{a}$ 都可由 x,y 唯一确定,而且有序数对(x,y)恰好就是向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点坐标,这就是平面直角坐标系中向量与点的坐标之间的一一对应关系. 其中,

$\boldsymbol{i}=(1,0),\boldsymbol{j}=(0,1),\boldsymbol{0}=(0,0).$

x,y 分别叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 在横轴和纵轴方向的分量.

(3)为什么要研究向量的坐标表示?

一个明显而主要的理由是,利用向量的坐标表示,可以把向量的运算化归为其分量的运算,这样就实现了用向量表示几何基本元素,通过实数运算研究几何图形和图形的关系,从而也就彻底实现了几何对象的代数化. 用代数方法刻画几何对象,进而用代数方法论证几何关系,其中间桥梁就是向量. 具体而言我们有:

设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1),\boldsymbol{b}=(x_2,y_2),\lambda$ 为实数,θ 是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角,那么

(i)$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x_1+x_2,y_1+y_2)$;

(ii)$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda x,\lambda y)$;

(iii)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2$.

由向量运算的坐标表示,可以得出许多有用的结论,例如:

(i)当且仅当 $x_1y_2-x_2y_1=0$ 时,向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq 0)$共线;

(ii)若 $\boldsymbol{a}=(x,y)$,则$|\boldsymbol{a}|^2=x^2+y^2$,或$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x^2+y^2}$;

(iii)$P_1(x_1,y_1)$,$P_2(x_2,y_2)$两点间的距离公式:

由 $\overrightarrow{P_1P_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$,即得

$|\overrightarrow{P_1P_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

(iv)夹角公式:

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}.$$

5　几何中的向量法

5.1　向量法有哪些特点

首先,用向量表示几何元素,本质是让几何量带上符号,"对比把长度、面积、体积考虑为绝对值的普通初等几何学,这样做有极大的好处. 初等几何必须依照图形呈现的情况而区分许多情况,而现在用几个简单的一般定理就可以概括."([3],p.6)例如,对于数轴上三个点 $A(x),B(y),C(z)$,如果求 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$,那么无论三点的顺序如何,结果都是 $\overrightarrow{AC}=z-x$;如果求$|AB|+|BC|$,那就要分类讨论. 这里,符号所表达的几何要素是方向,向量的不同方向就把这些点可能的不同顺序考虑在内了.

其次,向量法是利用运算律、通过向量运算解决几何问题,而代数运算是程序化的,这和平面几何中用演绎法、通过逻辑推理解决问题的味道大不相同. 实际上,平面几何中证明问题并没有通用方法.

第三,向量法中使用的几个"一般定理"是:向量加法法则及运算律;向量数乘的意义及其运算律;向量数量积的意义和运算律;向量基本定理.

为什么用这几个定理就可以概括了呢? 如前所述,由向量加法的三角形法则所导出的"向量回路"$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{0}$ 与三角形定义中"三条线段首尾相接"是完全一致的,而三角形是最基本、最重要的几何图形,它的基本性质是整个欧氏几何的基础;向量加法的交换律 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ 可以想象为平行四边形性质的向量表达;数乘向量运算就是共线向量的加减运算,其运算法则与实数的运算法则本质一致,而分配律 $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$ 就是相似三角形对应边成比例的向量表达;平面向量基本定理与平行四边形的性质也有内在的一致;平面向量数量积与余弦定理等价,而余弦定

理(勾股定理)是定量平面几何中最重要的定理;等等.

综上可见,这几个"一般定理"对最基本的几何图形性质作出了向量表达,从而也就奠定了解决几何问题的基础.由此出发,利用向量表达基本几何元素,通过向量运算解决问题,而运算的过程实际上就是利用基本几何图形性质的过程.所以我们说,向量集数与形于一身,向量运算既是数的运算,也是"图形的运算",根据图形的基本特征,利用图形中元素的基本关系列出向量等式,使计算与图形融为一体,这是体现向量法解题特点的关键.

5.2 关于余弦定理、正弦定理的证明方法

课程标准提出:"借助向量的运算,探索三角形边长与角度的关系,掌握余弦定理、正弦定理."根据这个要求,人教A版采用向量法证明这两个定理.可以发现,用向量法证明余弦定理非常简捷(但不容易想到),而用向量法证明正弦定理则非常繁琐(这也说明,在解决具体问题时,向量法并不总是最优方法).另外,从向量的应用切入"解三角形"的课题也不够自然.

如何自然而然地引入"解三角形"课题呢?

首先,这个课题的起点在初中平面几何的全等三角形判定定理(初中教科书成为"基本事实").由SAS,ASA,SSS可知,三角形的形状、大小已经由这三组要素分别唯一确定.这是定性的结论.

数学的研究往往是先做定性探究,再做定量分析.这是一个由表及里、逐步精确、精益求精的自然进展.从定量的角度看,上述三个定理表明,三角形的任意元素可由这三组要素分别唯一确定,即三角形的三边边长、三个内角的角度、面积、高、外径、内径等等几何量都可以用这三组要素分别表示,这些几何量之间存在的基本函数关系就是三角定律.那么,如何推导这些基本关系?

(1)正弦定理的推导

三角形面积是基本而重要的,由SAS容易知道,对于$\triangle ABC$,设A,B,C所对边分别是a,b,c,那么:

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B.$$

简单变形即得正弦定理.由正弦定理直接可得ASA的解.

因为面积是基本而重要的几何量,三角形面积公式很容易得到,而正弦定理就是面积等式的推论,因此正弦定理的推导应首选这个方法.

另外一种常用方法是从锐角三角函数出发建立正弦定理的猜想,然后给出证明,而证明又化归到直角三角形中去.这里需要注意的是如何使猜想来得自然,其要点是抓联系的纽带,即在

$$\sin A=\frac{a}{c},\sin B=\frac{b}{c} \quad ①$$

中以c为纽带,将两者联系起来,得到

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=c. \quad ②$$

再利用$\sin C=1$,从形式的统一性上将上式改写为

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}. \quad ③$$

人教A版在引导学生猜想的过程中强调了如下几点:

第一,①中的边角关系对一般三角形是不成立的;

第二,①的两个关系式有共同要素,由此可以建立联系,得到一个新的边角关系式;

第三,表达形式的改变,使其变得具有对称性,和谐优美的表达恰恰反映了三角形的本质特征,可以看成是"对称支配力量"的体现.

在科学发展史上,以对称美、和谐美、统一性等为指导思想,从理论上先猜想结论,再通过实践证实的事例很多.上述做法可以理解为使学生认识数学的文化价值、审美价值的一个小小举措.

(2)余弦定理的推导

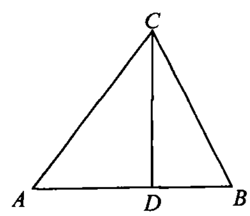

图8

从"自然"的角度看,在利用图8,通过$a\sin B=CD=b\sin A$等证明正弦定理的基础上,继续利用它得出

$$c=b\cos A+a\cos B. \quad ①$$

同理有

$a=c\cos B+b\cos C$, ②

$b=a\cos C+c\cos A$. ③

解方程组①②③即可得出余弦定理.

这个证法运算比较复杂，并且需要分锐角三角形和钝角三角形讨论. 能不能改进方法，使证明简捷一些呢？

由 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ 及 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$，两者结合就比较容易想到利用向量的数量积（具体过程略）.

实际上，向量代数的产生是十九世纪中叶的事情，而余弦定理古已有之. 证明方法的改进，新工具的引进是一个方面，另一方面则源于对已有方法的反思. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}$ 对任意三角形都成立，这就是向量表示的统一性所带来的方便，教学中要提醒学生注意向量法的这一特点.

6　教学建议

向量的数学内涵深刻、有明确的物理背景，是一种有用的数学语言，是数形结合的强有力工具. 本单元的教学有两个基本任务，一是让学生理解这种语言，二是让学生通过用向量语言、方法表述和解决平面几何问题，初步掌握向量法，形成用向量的习惯. 中学阶段主要通过解决几何问题，让学生体悟向量法的简捷，感受向量的力量.

6.1　向量的教学中存在的主要问题

(1)对向量及其运算的理解还不够到位，特别是对“向量集数与形于一身”的含义、“方向”的重要性及其数学表达的意义、用向量研究图形位置关系和数量关系的优势等缺乏必要的思考.

(2)没有反映向量法的本质，披着向量法的外衣，实际上还是综合几何的方法.

(3)把向量法中的代数化曲解为“坐标运算”，窄化了向量法的应用范围.

为此，我们需要加深对“方向”的重要性的认识，加强从四个“一般定理”出发思考和解决问题的教学，加强“代数运算”和“图形运算”的结合.

6.2　加强学科之间的联系

向量的概念、运算都有明确的物理背景，因此向量的教学必须引导学生借助物理背景，如：

位移、速度、力等——向量的定义与表示；

位移的合成——向量加法的三角形法则，力的合成——向量加法的平行四边形法则；

物体受力平衡——相反向量、向量的减法法则；

物体受力做功——向量的数量积；

力的分解——平面向量基本定理、“基底”概念和向量的坐标表示.

另外，还要加强应用向量解决物理问题，从而使学生体会向量与实际的联系.

6.3　加强数学内部的联系与综合

由内容本身所决定，向量的学习必须注重形与数的结合. 应该在一开始就采取措施让学生养成从形与数两方面看向量、用向量的习惯：

向量的概念与表示，相伴相随的是大小、方向、有向线段表示、代数表示，建立向量的直观形象和代数抽象表达；

建立向量的运算体系，“运算法则”和“几何定理”、“运算律”和“运算的几何性质”都是融合一起的；

向量投影、投影向量，向量基本定理的几何直观与代数表达；

用向量解决几何问题，对象是几何图形及其关系，方法是代数运算；等等.

6.4　加强类比，按研究一个数学对象的基本套路展开有序教学

与数及其运算的研究进行类比，与对一个几何图形的研究套路进行类比，形成向量的研究内容与架构、基本路径、基本方法等等.

通过与数及其运算的类比，得出整体架构：运算对象——运算法则——运算性质——联系与综合——应用；

通过与研究几何图形的类比，得出整体架构：向量的图形表示——向量运算的几何意义（性质）——几何图形元素与关系的向量表示——通过向量运算研究几何图形的性质与度量；等等.

6.5　在一般观念指导下展开研究

在本单元的教学中，要引导学生思考和体会一些基本问题，例如：

如何抽象一个运算对象，定义一个运算对象要完成哪几件事情；

引入一种量就要研究关于它的运算，定义一种运算就要研究运算律；有了运算，向量的力量无限；没有运算，向量只是一个路标；

向量运算的几何意义（几何 （下转第 29 页）

多方向多维度对均值不等式进行探索.在探索的过程中,从定比分点的角度,深刻理解四种平均数的概念以及平均数之间的不等关系,将定比分点与平均数的来源与概念融合,进行层次性的变换;将不等关系从数过渡到线段中的定比分点,进行维度的升华,体现了数学的渐变性与统一性;同时也建构了几何与代数、函数与不等式之间的桥梁,增添了课程的趣味性与深度.

对教材进行深度分析是教师的基本功之一.有两条基本路径.其中一条是对已有的文本进行多角度的理解,或者是从高观点解读、或者是从多角度解读、或者是从横向关联的角度进行解读.其目的在于"理解数学",把已有文本后面的数学的精神、思想、方法揭示出来,让学生获得不一样的体会.第二种路径是就通过探究来理解教材,就如进攻是最好的防御一样,做数学探究也是一种理解教材的好方式.

数学的本质是自由,数学教学是培养创造性思维的舞台,在大学课堂教学中更应如此.本课例是在课堂教学中,通过教基本知识,以一线串通相关知识,举一反三思考问题而产生的一个思考结果.通过研究深化了学生对均值不等式链的理解,更为重要的是培养了学生创造性的思维,导引了他们的思考.

参考文献

[1]汪晓勤,郭锦融.古希腊数学中的均值不等式[J].中学数学月刊,2015(2):54-56

[2]章建跃.章建跃教育随想录[M].杭州:浙江教育出版社,2017

[3]邓卫平.几何平均数与调和平均数那点儿事[J].调研世界,2013(8):64-65

(上接第13页)

性质),就是与特殊向量相关的运算、两个有特殊关系的向量的运算所表现的特殊性;

向量基底表示向量中体现的数学思想,特别是单位正交基的使用;

向量法——先用几何眼光观察,再用向量法解决;等等.

6.6 加强用"几个一般定理"解决问题的训练

向量的加法法则、数乘向量、向量的数量积和向量基本定理等几个"一般定理"的灵活应用需要一定的训练,要让学生养成用向量思考和解决几何问题的习惯.

三角形、平行四边形是最基本的几何图形,平行、垂直是最基本的关系,几个"一般定理"是对这些基本图形和基本关系的向量表达.要注意利用这几个"一般定理",加强用向量的语言和方法处理平面几何中基本问题的训练.例如,线段的定比分点,余弦定理、正弦定理的发现与证明,三角形的"心"的性质,平行四边形中边、对角线之间的关系,等等.

6.7 关于投影向量

投影向量是本次课标修订中引入的概念.

投影向量是与向量垂直有关的概念.如图9,$\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{ON}=\boldsymbol{b}$.过点$M$作直线$ON$的垂线,垂足为$M_1$,则$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{M_1M}$,其中$\overrightarrow{OM_1}$与$\boldsymbol{b}$共线,$\overrightarrow{M_1M}\perp\boldsymbol{b}$.可以发现,$\overrightarrow{OM_1}$与$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$都有关系,这是需要研究的.

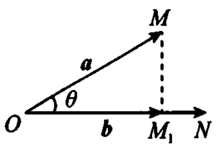

图9

设与$\boldsymbol{b}$方向相同的单位向量为$\boldsymbol{e}$,$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为θ.当θ为锐角时,容易得到$\overrightarrow{OM_1}=|\boldsymbol{a}|\cdot\cos\theta\boldsymbol{e}$.而$\theta$的取值范围是0到$\pi$,可以验证$\theta$为直角、钝角以及$\theta=0$,$\theta=\pi$时此式仍然成立.

由数量积的定义可得$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}=|\boldsymbol{a}|\cos\theta$,所以$\overrightarrow{OM_1}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e})\boldsymbol{e}$,此式揭示了投影向量与向量数量积的联系.

$|\overrightarrow{OM_1}|$是点O到直线MM_1的距离,而$|\overrightarrow{OM_1}|=|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}|$,这是用向量方法推导点到直线的距离公式的依据.

参考文献

[1]史宁中.数形结合与数学模型——高中数学教学中的核心问题[M].北京:高等教育出版社,2018,7

[2]章建跃,李增沪主编.普通高中教科书·数学(必修)第二册[M].北京:人民教育出版社,2019

[3][德]F·克莱因.高观点下的初等数学(二)[M].舒湘芹,等,译,上海:复旦大学出版社,2008,9