基于数学史料的高中数学问题编制策略①

汪晓勤

（华东师范大学教师教育学院　200062）

1 引　言

近年来，随着 HPM 视角下课例研究的深入开展以及一系列相关课例的发表，越来越多的数学教师开始关注 HPM 的教学理念、教育价值和教学策略．一般说来，数学教学中运用数学史料的方式有附加式、复制式、顺应式和重构式[1]．除了附加式（介绍数学家的生平轶事、提供数学史阅读材料等）外，其他三种方式都与问题提出息息相关：复制式指的原始材料的直接采用（有时需要进行必要的语言转换），其中最主要的材料之一就是历史上的数学问题；顺应式指的是对数学史料的改编，包括对问题的改编；重构式是指借助一系列由易至难、环环相扣的问题串，再现知识的发生和发展过程．因此，在 HPM 视角下的数学教学中，数学问题乃是数学史的最重要的载体．

另一方面，近年来，高考数学卷中相继出现了一些涉及数学文化的问题，这些问题引起人们的浓厚兴趣，已有大量文献对这些问题做过分析（如[5－11]）．数学史是数学文化的重要组成部分，讨论高考数学文化题，都绕不开基于数学史的问题．尽管已有部分文献对数学文化或数学史问题进行了分类（如[6]和[8]），但分类方法还有待于进一步论证、细化和修正．本文的研究问题是：如何从数学史料出发，编制数学问题？高考数学卷中涉及数学史的问题反映了问题提出的哪些策略？

我们希望在已有相关研究的基础上，建立“基于数学史的问题提出策略”的分类框架，并用于部分高考试题以及高中数学典型问题的分析，为未来 HPM 视角下的课堂教学和试题命制提供参考．

2 基于数学史料的问题提出策略

美国学者希尔佛（Silver）等人的研究表明，根据已知情境或已知问题提出新问题的具体策略有四种[2][3]：

- 条件式策略，即改变给定情境的条件而保持其目标不变，提出新问题；
- 目标式策略，即改变给定情境的目标而保持其条件不变，提出新问题；
- 对称式策略，即将给定情境中的条件和目标互换，提出新问题；
- 链接式策略，即以给定情境的目标作为已知条件，提出新问题．

其中前两种策略即为所谓的“否定属性”（what－if－not）策略．如果给定情境是含有条件和目标（或结论）的数学史材料（主要是数学命题和数学问题），那么相应地，“基于数学史料的问题提出策略”也包含上述四类，从数学史运用方式上说，这四种策略都属于顺应式．但是，希尔佛在其研究中所发现的问题提出策略，并不考虑课堂教学的需求，而本文所说的“基于数学史的问题提出策略”是服务于课堂教学的，因而有其特殊性．对于含有条件和目标（或结论）的数学史料来说，具体体现在以下几个方面：

- 当数学史料完全满足课堂教学需求，即满足科学性、有效性、可学性、趣味性和人文性时，无需对其进行改编，因此，基于数学史料的问题提出策略应该包含“复制式策略”，即除语言翻译外，对情境、条件、目标（或结论）不加改编而直接采用；
- 当数学史料部分满足课堂教学需求，但未能体现可学性、趣味性或人文性时，需要补充情境或

① “上海高校立德树人人文社会科学重点研究基地”之数学教育教学研究基地项目“数学课程与教学中如何落实立德树人根本任务的研究”（A8）系列论文之一．

对原有情境进行改编,但不改变史料中的条件和目标(或结论),这种策略称为“情境式策略”;

•针对一则数学史料,采用以上各类策略所提出的问题,都无法满足课堂教学需求,此时,教师需要同时改变史料中的情境、条件和目标(或结论),此时的策略称为“自由式策略”.

对于不含条件或目标(或结论)的数学史料(主要是指概念定义、作图工具等),为了编制满足课堂教学需求的问题,需要设定条件或目标,此时的策略也属于“自由式策略”.

因此,“基于数学史料的问题提出策略”至少有七类,见表1.

表1 基于数学史料的问题提出策略

类别	数学史料	问题提出的策略
含有条件和目标	公式、定理或法则	复制式、条件式、目标式、对称式、自由式
	数学问题	复制式、情境式、条件式、目标式、对称式、链接式、自由式
不含条件和目标	概念定义	自由式
	作图工具	自由式
	其他史实	自由式

例如,《九章算术》勾股章中设有如下问题(通常称为“勾股容方问题”):“今有勾五步,股十二步,问:勾中容方几何?”如果我们以该问题作为出发点,运用各种策略,分别可以提出以下新问题.

问题1:已知直角三角形的两条直角边的长分别为5和12,求与该直角三角形具有公共直角的内接正方形的边长.(复制式)

问题2:有一块直角三角形空地,直角边长分别为5米和12米.现要在该空地上建一个面积最大的正方形花坛,求该花坛的边长.(情境式)

问题3:已知直角三角形的两条直角边长分别为7米和25米,求与直角三角形具有公共直角的内接正方形的边长.(条件式)

问题4:已知直角三角形的直角边为a和b,求其内接正方形的边长.(条件式)

问题5:若直角三角形两条直角边分别为a和b,则内接正方形边长为$\frac{ab}{a+b}$.你觉得古人是如何得到这个结果的?(条件式)

问题6:已知直角三角形的直角边为5和12,求其内接正方形的面积.(目标式)

问题7:已知直角三角形内接正方形(与直角三角形有公共直角)的边长为$\frac{60}{17}$,斜边为13,求直角边.(对称式)

问题8:已知直角三角形的直角边为a和b,试写出与直角三角形有公共直角的内接正方形的边长与a和b之间的关系,据此证明均值不等式$\frac{2ab}{a+b}\leqslant\frac{a+b}{2}$.(链接式)

问题9:如图1,若Rt$\triangle ABC$的两条直角边分别为a和b,正方形$CEDF$和$MNPQ$为它的两个不同的内接正方形,试比较$ECFD$和$MNPQ$边长的大小.(自由式)

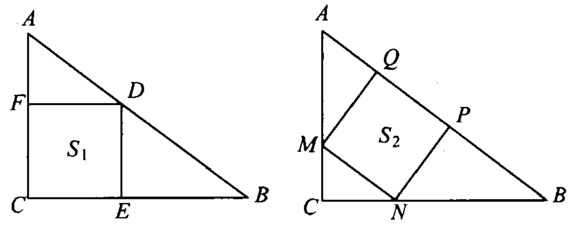

图1 勾股容方新问题

问题10:如图1,正方形$CEDF$和$MNPQ$内接于同一个直角三角形ABC,其面积分别S_1和S_2,$\angle A=\alpha$.已知$S_1=441$,$S_2=440$,求$\sin 2\alpha$.(自由式)

3 基于数学史料的高考题

3.1 复制式问题

高考数学卷中的“复制式”问题较多取自中国古代数学名著《九章算术》和《数书九章》,如《九章算术》中的“九节均容”问题(2011年湖北文理卷)、“委米依垣”问题(2015年全国课标Ⅰ卷)、《数书九章》中的“天池测雨”问题(2013年湖北文科卷)、“米谷粒分”问题(2015年湖北文理卷)等.2017全国Ⅱ卷采用了明代数学家程大位(1533—1606)《算法统宗》中的问题:“远望巍巍塔七层,红光点点倍加增.共灯三百八十一,请问尖头几盏灯?”这是一道已由等比数列项数、公比与和求首项的问题.命题者除了对原文进行翻译外,原题的情境、已知条件和目标都不变,故属于“复制式”问题.

有些问题看似与数学史无关，但如果从数学史的角度去看，却是古代数学家解决过的问题. 如 2017 年江苏卷中的一题："如图(图 2)，在圆柱 O_1O_2 内有一个球 O，该球与圆柱的上下底面及母线均相切. 记圆柱 O_1O_2 的体积为 V_1，球 O 的体积为 V_2，则 V_1/V_2 的值是______."该问题正是古希腊数学家阿基米德(Archimedes，前 287—前 212)曾经孜孜以求的问题，问题的解决是阿基米德生前最引以为豪的工作，而在他去世之后，求与外切圆柱还被刻在他的墓碑上. 因此，我们也可以将本题视为"复制式"问题.

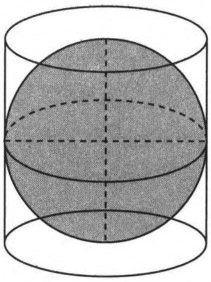

图 2 圆柱及其内切球

3.2 条件式问题

2018 年浙江数学卷根据《张丘建算经》中的百鸡问题编制了一道方程问题：

我国古代数学著作《张丘建算经》中记载百鸡问题："今有鸡翁一，直钱五；鸡母一，直钱三；鸡雏三，直钱一. 凡百钱，买鸡百只，问：鸡翁、母、雏各几何."(考卷上"丘"误作"邱"，《张丘建算经》原文中的"直"写成"值")设鸡翁、鸡母、鸡雏个数分别为 x,y,z，则 $\begin{cases} x+y+z=100 \\ 5x+3y+\frac{1}{3}z=100 \end{cases}$. 当 $z=81$ 时，$x=$______，$y=$______."

这里，命题者对"百鸡问题"中的条件进行操作，将原题中的不定方程组改编为一个适定的二元一次方程组，故属于"条件式"问题.

3.3 目标式问题

2017 年浙江数学卷先介绍三国时代数学家刘徽的割圆术以及祖冲之的贡献，然后提出数学问题：我国古代数学家刘徽创立的"割圆术"可以估算圆周率 π，理论上能把 π 的值计算到任意精度，祖冲之继承并发展了"割圆术"，将 π 的值精确到小数点后七位，其结果领先世界一千多年，"割圆术"的第一步是计算单位圆内接正六边形的面积 S_6，$S_6=$______.

如图 3 所示，AB 为圆内接正 n 边形的一边，长为 a_n，$AC=BC$ 是圆内接正 $2n$ 边形的一边，长为 a_{2n}，则圆内接 $2n$ 边形的面积为

$$S_{2n}=nS_{\text{筝形}OABC}=n\left(\frac{1}{2}a_nR\right)=\frac{1}{2}na_nR.$$

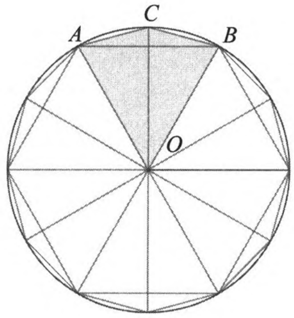

图 3 割圆术

上述公式是割圆术的关键公式，刘徽利用该公式证明了圆面积公式. 为了求圆周率的近似值，从 $a_6=R=1$ 尺出发，刘徽先计算出

$$S_{12}=\frac{1}{2}\times6\times a_6\times R=300(\text{寸}^2),$$

再根据"倍边公式"

$$a_{2n}=\sqrt{\left(\frac{a_n}{2}\right)^2+\left(R-\sqrt{R^2-\left(\frac{a_n}{2}\right)^2}\right)^2},$$

依次计算 a_{12}，a_{24}，a_{48} 和 a_{96}，相应计算出

$$S_{24}=\frac{1}{2}\times12\times a_{12}\times R=310\,\frac{1757}{2500}(\text{寸}^2),$$

$$S_{48}=\frac{1}{2}\times24\times a_{24}\times R=313\,\frac{13143}{50000}(\text{寸}^2),$$

$$S_{96}=\frac{1}{2}\times48\times a_{48}\times R=313\,\frac{584}{625}(\text{寸}^2),$$

$$S_{192}=\frac{1}{2}\times96\times a_{96}\times R=314\,\frac{64}{625}(\text{寸}^2).$$

显然，割圆术的第一步不是计算 S_6，而是计算 S_{12}. 因此，本题改变了割圆术中的目标，因而属于"目标式"问题. 如果将所求项改为 S_{12}，那么问题就符合割圆术的原意，成为"复制式"问题了. 本题中，命题者的初衷并非目标操作，但由于曲解史料的原意，无意中改变了问题提出的策略.

2018 年全国 I 卷以希波克拉底定理为基础，编制了一道概率问题：

下图(图 4)来自古希腊数学家希波克拉底所

研究的几何图形.此图由三个半圆构成,三个半圆的直径分别为直角三角形 ABC 的斜边 BC 和直角边 AB,AC. ABC 的三边所围成的区域记为Ⅰ,黑色部分记为Ⅱ,其余部分记为Ⅲ.在整个图形中随机取一点,此点取自Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ的概率分别为 p_1,p_2,p_3.则

A. $p_1=p_2$; B. $p_1=p_3$;

C. $p_2=p_3$; D. $p_1=p_2+p_3$.

本题所依据的数学史料是希波克拉底定理,该定理的结论是 Rt$\triangle ABC$ 的面积等于两个弓月形面积之和,即区域Ⅰ的面积等于区域Ⅱ的面积.命题者对定理的结论进行操作,将Ⅰ和Ⅱ的面积关系替换为"在整个图形中随机取一点,此点取自Ⅰ和Ⅲ的概率 p_1 和 p_2 的大小关系",形成一个新问题,故本题也属于目标式问题.

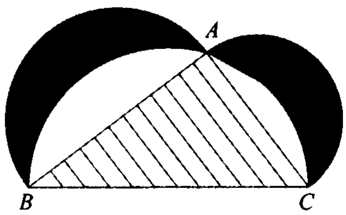

图4 希波克拉底的几何图形

3.4 自由式问题

"自由式"问题在历年高考题中也时有出现,如2012年湖北理科卷根据历史上圆周率的不同分数近似值,编制了一道比较包括《九章算术》"开立圆术"在内的不同球体积近似公式的问题;2015年湖北文理卷根据16世纪荷兰数学家舒腾(F. van Schooten, 1615—1660)的椭圆规编制的解析几何问题. 2018年北京卷根据明代学者朱载堉(1532—1611)的"十二平均律"编制了一道等比数列问题:

"十二平均律"是通用的音律体系,明代朱载堉最早用数学方法计算出半音比例,为这个理论的发展作出重要的贡献.十二平均律将一个纯八度音程分成十二份,依次得到十三个单音,从第二个单音起,每一个单音的频率与它前一个单音的频率之比都等于 $\sqrt[12]{2}$.若第一个单音的频率为 f,则第八个单音的频率为

A. $\sqrt[3]{2}f$; B. $\sqrt[3]{2^2}f$;

C. $\sqrt[12]{2^5}f$; D. $\sqrt[12]{2^7}f$

由于"十二平均律"属于音乐理论,属于表1中"不含条件和目标"的史料,由此提出的问题归为"自由式".

当然,有些高考题虽然贴上了数学史的"标签",但并不属于"基于数学史料的数学问题".如2019年浙江数学卷先介绍了祖暅原理——"缘幂势既同,则积不容异",然后编制了一道已知柱体的三视图,求柱体体积的问题.该问题本质上与祖暅原理并无多大关联.

4 基于数学史的数学问题举例

为了进一步说明"基于数学史的问题提出策略"的分类框架的可行性,我们再举两个例子.

4.1 奇数与立方数的关系

公元1世纪,古希腊数学家尼可麦丘(Nicomachus)发现奇数与立方数之间存在如下关系[12]:

$1=1^3$,

$3+5=2^3$,

$7+9+11=3^3$,

$13+15+17+19=4^3$,

……

在尼可麦丘所生活的时代,人们并不会用字母表示数,因此,我们无法苛求他给出奇数与立方数的一般关系式.上述规律为三次幂和公式的发现开辟了道路,我们有理由相信,尼可麦丘已知道三次幂和的规律,因为同时代的罗马土地测量员据说都知道这个规律.事实上,根据尼可麦丘的上述规律,我们有

$1^3=1=1^2$(1个奇数),

$1^3+2^3=1+3+5=(1+2)^2$(1+2个奇数之和),

$1^3+2^3+3^3=1+3+\cdots+11=(1+2+3)^2$(1+2+3个奇数之和),

$1^3+2^3+3^3+4^3=1+3+\cdots+19=(1+2+3+4)^2$(1+2+3+4个奇数之和),

……

尼可麦丘写不出一般的等式,而有了字母表示任意数的思想,我们可以写出一般关系式,并找出更多的规律.据此,我们可以编制一系列问题.把正奇数数列 $\{2n-1\}$ 中的数按上小下大、左小右大的原则排成如下三角形数表:

1

3　5

7　9　11

13　15　17　19

21　23　25　27　29

……………………………………

设 $a_{nm}(n,m\in\mathbf{N}^*)$ 是位于该三角形数表中从上往下数第 n 行、从左往右数第 m 个数.

(1)用 n 和 m 表示 a_{nm}；

(2)已知 $a_{nm}=2021$，求 n 和 m 的值；

(3)设 $a_{n1}+a_{n2}+\cdots+a_{nn}=b_n$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n；

(4)设 $c_n=b_{n+1}-b_n$，利用数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项之和，求二次幂和 $1^2+2^2+\cdots+n^2$；

(5)求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}}{b_{n+1}}$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1n}}{b_{n+1}}$；

(6)已知函数 $f(x)$ 的反函数为 $f^{-1}(x)=8^n x^3\ (x>0,n\in\mathbf{N}^*)$，求数列 $\{f(b_n)\}$ 的前 n 项和 T_n，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}T_n$；

(7)证明：当 $n>1$ 时，$\dfrac{f(b_1)}{a_{11}+1}+\dfrac{f(b_2)}{a_{22}+1}+\cdots+\dfrac{f(b_n)}{a_{nn}+1}>\dfrac{1}{4}$.

以上问题都是以尼可麦丘所发现的奇数与立方数之间关系为出发点，且问题的条件和目标都是新设的，因而均属于“自由式”问题.

问题(4)和(6)的背后还蕴含了更多的数学史元素.(4)中的累加法，正是 17 世纪法国数学家帕斯卡(B. Pascal，1623－1662)推导幂和公式的方法，由等式

$$(r+1)^{p+1}-r^p$$
$$=C_{p+1}^1 r^p+C_{p+1}^2 r^{p-1}+\cdots+C_{p+1}^p r+1$$

分别取 $r=1,2,\cdots,n$，将 n 个等式两边分别累加，即可有 $p-1$ 次以及更低次的幂和公式推导出 p 次幂和公式[13].

(6)中的 $f(b_n)=\dfrac{n}{2^n}$，所求的 $\lim\limits_{n\to\infty}T_n$ 正是 14 世纪法国数学家奥雷姆(N. Oresme，1323—1382)用几何方法(图 5)解决过的无穷级数问题，奥雷姆的结果是

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}+\cdots=2.$$

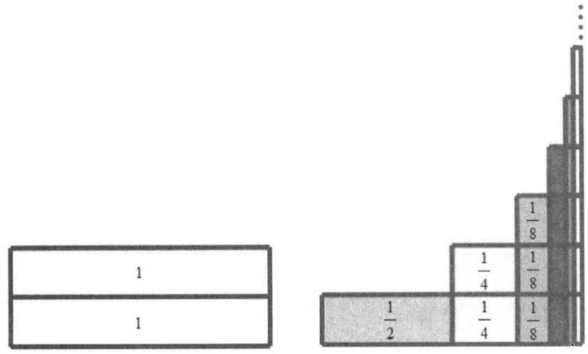

图 5　奥雷姆的面积变换方法

从例 1 可见，从古代数学史料出发可以提出有若干问题组成的问题串，而其中的某些问题本身也可能是历史上别的数学家曾经解决过的问题，因次，如果以别的史料为参照，这些问题可能又会成为“复制式”或“条件式”问题了.

4.2　抛物弓形的面积

古希腊数学家阿基米德在其《抛物弓形求积》中解决了抛物弓形的面积问题. 如图 6 所示，设 AB 是抛物线的一条弦，阿基米德证明[14]：

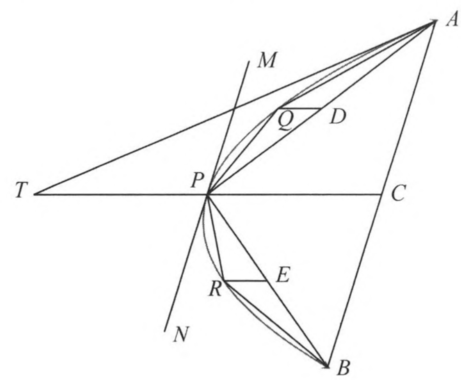

图 6　抛物弓形的性质

命题 1：过抛物线上任意一点 P 作抛物线对称轴的平行线，交 AB 与 C，若 AB 平行于抛物线在点 P 处的切线 MN，则 $AC=BC$；反之，若 $AC=BC$，则 AB 平行于抛物线在点 P 处的切线 MN.

命题 2：P 为抛物线上任意一点，直线 AB 与抛物线在 P 处的切线 MN 平行，交抛物线于点 A 和 B，过 P 作抛物线对称轴的平行线，交 AB 于点 C，交抛物线在点 A 处的切线于点 T，则 PT

$=PC$.

命题3:过 AB 的中点 C 作抛物线对称轴的平行线,交抛物线于点 P,则 P 为抛物弓形的顶点.

命题4:设 P 是抛物弓形 ABP 的顶点,Q 和 R 分别是 AP 和 BP 所截的小抛物弓形的顶点,则 $S_{\triangle APQ}=S_{\triangle BPR}=\frac{1}{8}S_{\triangle ABP}$.

命题5:设 P 是抛物弓形的顶点,则抛物弓形 ABP 的面积等于 $\frac{4}{3}S_{\triangle ABP}$.

由于只有纯几何的方法,加上没有极限概念,命题5的证明并非易事,需要用到穷竭法.而我们今天有了解析几何这一重要工具,再加上极限工具,可以根据阿基米德上述命题编制一组新的解析几何问题.

如图7,直线 $l:y=kx+b$ 与抛物线 $x^2=2py$ $(p>0)$ 相交于不同的两点 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$.$M(x_0,y_0)$ 是抛物线上任意一点,过 M 作 y 轴的平行线,交 AB 于 C.

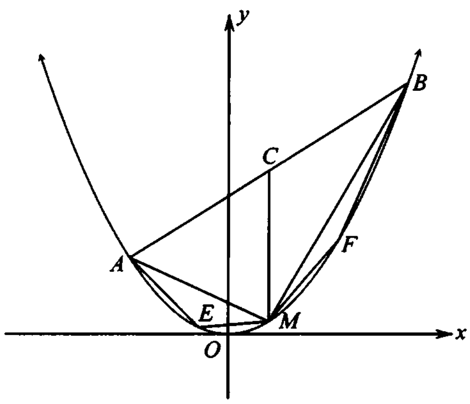

图7 基于数学史的抛物线问题

(1)求抛物线平行弦的中点轨迹;

(2)求抛物线在点 M 处的切线方程;

(3)证明:C 是 AB 中点的充要条件是抛物线在点 M 处的切线平行于 AB;

(4)证明:若 C 是 AB 的中点,且抛物线在点 A 处的切线与 CM 的延长线交于点 T,则 $CM=MT$;

(5)证明:若 C 是 AB 的中点,则 CM 是抛物弓形中所有与 y 轴平行的截线段中最长的线段,即点 M 是抛物弓形的顶点.

(6)设 C 为 AB 的中点,$|x_2-x_1|=d$,试用 d 来表示 $\triangle ABM$ 的面积.

(7)设 C 为 AB 的中点,联结 AM、BM,分别作与 AM、BM 平行的切线,切点分别为 E、F,证明:$S_{\triangle AME}=S_{\triangle BMF}=\frac{1}{8}S_{\triangle ABM}$.

(8)求抛物线弓形 ABM 的面积.

以上8个问题中,问题(3)、(4)、(5)、(7)和(8)分别对应于阿基米德的命题1－5,问题的目标没有变,但采用代数方程来表征抛物线和直线,问题的条件发生了改变,因此,这些问题都属于"条件式"问题.而问题(1)、(2)和(6)则属于"自由式"问题.

5 结语

以上我们看到,根据"基于数学史料的问题提出策略"的分类,有关高考题大多采用了复制式、条件式、目标式和自由式四种,但很少采用情境式、对称式和链接式.根据"奇数与立方数之间的关系"和"抛物弓形的面积"两则史料所编制的一系列高中数学问题表明,由于古今数学表征、数学方法、数学工具的巨大差异,要编制适合于今日课堂教学或考试的数学问题,条件式和自由式往往是理想的选择.

基于数学史料的数学问题提出策略对于HPM视角下数学教学设计和数学文化试题的编制都有重要指导意义.但是,就像一个具有高超的烹饪技术但缺少好食材的厨师很难烧出一道好菜一样,一个掌握了问题提出策略却缺乏好素材的教师或命题者也无法编出一道好题.首先,一线教师和命题者需要针对高中数学课程中涉及的知识点开展更深入、系统的历史研究,丰富课程、教材和教学的数学问题资源;其次,教师专业发展指导者可将"基于数学史的问题提出"这一主题纳入在职教师的培训课程中,让一线教师更多地了解问题提出策略,学习如何对数学史料做出必要的裁剪和加工,形成合适的数学问题;再次,一线教师和命题者需要正确认识基于数学史料的问题的教育价值,不能仅仅满足于数学文化标签,而是要展示数学文化的精髓,充分发挥数学史的多元教育价值.

参考文献

[1] 汪晓勤. HPM：数学史与数学教育[M]. 北京：科学出版社，2017

[2]Silver, E. A. et al. Posing mathematical problems: an exploratory study [J]. Journal for Research in Mathematics Education, 1996, 27(3): 293-309

[3] Singer, F. M. et al. Problem-posing research in mathematics education: new questions and directions [J]. Educational Studies in Mathematics, 2013, 83:1-7

[5] 仓万林，史嘉. 随风潜入"卷"，润"题"细无声[J]. 数学通报，2015，54(6)：46－50

[6] 史嘉. 2015 年"数学文化高考题"分类欣赏[J]. 数学通讯，2015(12)：46－49

[7] 孙庆括. 近十年高考数学文化命题的特征分析及启示[J]. 数学通报，2017，56(1)：49－54

[8] 陈莎莎，汪晓勤. 2007－2016 十年间基于数学史的高考试题分析[J]. 教育研究与评论(中学教育教学)，2017(5)：26－33

[9] 祁平等. 基于数学文化视角的命题研究[J]. 数学通报，2018，57(9)：19－24

[10] 李隽易. 数学文化题编拟研究[J]. 数学通报，2018，57(9)：25－28

[11] 李汝雁，郭要红. 2018 年高考数学文化试题的评析与教学建议[J]. 数学通报，2018，57(9)：29－31

[12] Heath, T. L. A History of Greek Mathematics [M]. Cambridge: The University Press, 1921.

[13] 汪晓勤. 中学数学中的数学史[M]. 北京：科学出版社，2002

[14] Heath, T. L. The Works of Archimedes. Cambridge: The University press, 1897

(上接第 8 页)

题 5：在$\triangle ABC$中. 求证：$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A\cos B\cos C=1$.

分析：此题若用三角公式变形，运算会比较复杂. 构造一个方程

$$x^2+2x\cos B\cos C+\cos^2 B+\cos^2 C-1=0,\quad ①$$

则根的判别式

$$\Delta=4\cos^2 B\cos^2 C-4(\cos^2 B+\cos^2 C-1)$$
$$=4(1-\cos^2 B)(1-\cos^2 C)=4\sin^2 B\sin^2 C$$

因此方程①的根为

$$x=-\cos B\cos C\pm\sin B\sin C=-\cos(B\pm C).$$

取其中的一个根 $x=-\cos(B+C)=\cos A$ 代入，既得$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A\cos B\cos C=1$.

上面 5 道题目，以方程思想方法为主线，组成一个单元教学，把代数、几何、三角等不同领域的问题用方程思想方法串联起来，可以起到完善学生认知结构，培养逻辑推理和数学运算能力.

4.3　教学策略

(1)鼓励学生讲解

教师给出任务，学生完成任务，选择解答问题出现错误的学生和解答问题优秀的学生上讲台，讲解自己的解题过程，教师和同学共同评判，让大家共同分析产生错误的原因，学习优异的解题思路，同时可以培养学生数学交流的能力.

(2)形成方法体系

在"回顾反思总结规律"环节，教师要分析这组题目的共性，为什么它们能够被统摄在一种思想方法之下，其特点和规律是什么，突出数学思想方法的价值与功能，让数学思想方法深入学生心灵，而不仅仅是为了掌握一些知识. 要强调的是，思想方法也包括一些解题的技巧，但解题技巧不是主流，思想方法层面更高、更普适，它与发展核心素养密切相关.

参考文献

[1] 崔允漷. 学科核心素养呼唤大单元教学设计[J]. 上海教育科研，2019(4)：1

[2]邵朝友 崔允漷. 指向核心素养的教学方案设计：大观念的视角[J]. 全球教育展望，2017(6)：11－19

[3]李润洲. 指向学科核心素养的教学设计[J]. 课程·教材·教法，2018(7)：35－40

[4]朱先东. 指向深度学习的数学整体性教学设计[J]. 数学教育学报，2019(5)：33－36

[5]章飞，顾继玲. 单元教学的核心思想与基本路径[J]. 数学通报，2019(10)：23－28

[6]徐文彬，李永婷，安丹诺. 单元知识结构整体教学设计模式的理论建构[J]. 江苏教育(中学教学)，2018(6)：7－9

[7]吕世虎，杨婷，吴振英. 数学单元教学设计的内涵、特征以及基本操作步骤[J]. 当代教育与文化，2016(4)：41－46

[8]李磊，安桂清. 以单元为单位进行整体教学设计[J]. 人民教育，2019(1)：52－55

[9]杨裕前，董林伟主编. 义务教育课程标准实验教科书 数学 九年级(下)[M]. 南京：江苏科技出版社，2004：6－37

[10]喻平. 数学学习心理的 CPFS 结构理论与实践[M]. 南宁：广西教育出版社，2008：22－23

[11]波利亚. 数学的发现(第一卷)[M]. 呼和浩特：内蒙古人民出版社，1980：14