研究高考试题　提升解题能力

黄山市歙州学校　　　巴忠平

高三年级的数学教学，特别是高三年级的第二、三轮的复习教学，它的教学目标已经不同于新授课的数学教学，也不同于第一轮的复习教学，它应该着眼于“支撑学科知识体系的重点内容”，因为高考的数学命题者要“精心设计考查数学主体内容，体现数学素质的试题”。因此，二、三轮的复习工作应抓住核心内容和方法，从数学思想和方法入手，完成构建知识网络，提升解题能力为目标。

其实，无论是构建知识网络，还是提升能力，最终的目标还是以提高学生的应试能力，取得令人满意的考试结果为目的。因此，如何提高学生分析问题和解决问题的能力，是当前摆在高三数学教师面前最突出的问题，每一位高三的老师在自己的教学实践中都有着自己一套行之有效的方法，同时因为学情各异，面对不同的学生也有不同的应对方法。在这里，我本人就多年从事高三毕业教学过程中的一点思考和做法提出来和各位老师交流，我期望通过和各位老师的交流，找到更合适有效的方法，使我们的工作更有成效，使更多的学生受益。

我们在平常的解题教学中，志在求知，为培养学生能力，应尽量避免“解题套路”，而着重于学生能力的培养，故应多发散，但在高考的考场上，学生在两个小时内要完成一张试卷，时间紧、任务重，为完成得分任务，在遇到熟悉问题时，应考虑“套”、“搬”、“借”，而一张高考试卷不可能题题都创新，可以“套”、“搬”、“借”的题目应该不在少数。因此，在二、三轮的复习中，帮助学生建立一些常规的解题模板，使学生在解题时对常规题做到有理可据、有型可依也是我们的教学目标之一。

怎样去构筑解题模板呢？我想高考考什么、怎么考，最直接的信息应来源于历年的高考试题。因此，研究高考试题，从历年高考试题中去提炼解题模板应该是最直接、最有效的途径了。下面我就以函数及其导数为例，剖析近几年的高考试题，揭示考查的核心关键,建立起解题模板，希望通过这样一个实例，给大家提供一个基本模型。

先看下面的例子：

（2013 全国新课标（I）卷第 21 题）

设函数 $f(x)=x^2+ax+b, g(x)=e^x(cx+d)$. 若曲线 $y=f(x)$ 和曲线 $y=g(x)$ 都过点 P（0，2），且在 P 处存在相同切线 $y=4x+2$

（1） 求 a,b,c,d 的值；（2）若 $x\ge -2$ 时，$f(x)\le kg(x)$，求 k 的取值范围。

分析：（1） $f(0)=2, g(0)=2, f^{'}(0)=4, g^{'}(0)=4$ 易求得 $a=4, b=c=d=2$

（2） 令 $F(x)=kg(x)-f(x)=2ke^x(x+1)-x^2-4x-2$，依题意得

$$\forall x\ge -2, F(x)\ge 0; \therefore F(0)=2k-2\ge 0 \Rightarrow k\ge 1$$
$$F^{'}(x)=2ke^x(x+2)-2x-4=2(x+2)(ke^x-1)$$
$$F^{'}(x)=0 \Rightarrow x_1=-\ln k, x_2=-2$$

$1\le k<e^2 \Rightarrow -2<-\ln k\le 0$

当 $x\in(-2,-\ln k)$ 时

$F^{'}(x)<0,$

当 $x\in(-\ln k,+\infty)$ 时

$F^{'}(x)>0,$

$F(x)$ 在 $(-2,-\ln k)$ 上单减，在 $(-\ln k,+\infty)$ 上单增

$F_{\min}(x)=F(-\ln k)$
$=\ln k(2-\ln k)\ge 0$

即当 $x\ge -2$ 时，$F(x)\ge 0$

即 $f(x)\le kg(x)$ 恒成立

$\boldsymbol{k=e^2}$ 时

$F^{'}(x)=2e^2(x+2)(e^x-e^{-2})$

当 $x\ge -2$ 时，$F^{'}(x)\ge 0, F(x)$ 在 $(-2,+\infty)$ 上单增，

$F(x)\ge F(-2)=0$

$\therefore f(x)\le kg(x)$ 恒成立

$k>e^2,$ 则

$F(-2)=-2ke^{-2}+2$
$=-2e^{-2}(k-e^2)<0$

从而当 $x\ge -2$ 时 $f(x)\le kg(x)$ 不可能恒成立

综上，$k\in[1,e^2]$

再看一例（2010 年山东第 22 题）

已知函数 $f(x)=\ln x-ax+\dfrac{1-a}{x}-1$,（1）当 $a\le\dfrac{1}{2}$ 时，讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）设 $g(x)=x^2-2bx+4$, 当 $a=\dfrac{1}{4}$ 时，若对 $\forall x_1\in(0,2)$ 存在 $x_2\in[1,2]$ 使 $f(x_1)\ge g(x_2)$，求实数 b 的取值范围。

分析：（1） $f'(x)=\dfrac{1}{x}-a-\dfrac{1-a}{x^2}=-\dfrac{ax^2-x+(1-a)}{x^2}, x>0$

$a=0$ 时 $f'(x)=\dfrac{x-1}{x^2}$， $f'(x)=0\Rightarrow x=1$

$x\in(0,1)$ 时， $f'(x)<0$， $f(x)$ 单减；

$x\in(1,+\infty)$ 时， $f'(x)>0$， $f(x)$ 单增。

$a\ne 0$ 时 $f'(x)=0\Rightarrow x=1$ 或

$x=\dfrac{1-a}{a}=\dfrac{1}{a}-1$

由 $a\le\dfrac{1}{2}\Rightarrow\dfrac{1}{a}-1\le 1$ 得

$a<0$ 时 $\dfrac{1}{a}-1<0$， $x\in(0,1)$ 时， $f'(x)<0$， $f(x)$ 单减；

$x\in(1,+\infty)$ 时， $f'(x)>0$，

$f(x)$ 单增。

当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时， $\dfrac{1}{a}-1=1$

$f'(x)\le 0$ 恒成立， $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单减。

$0<a<\dfrac{1}{2}$ 时，

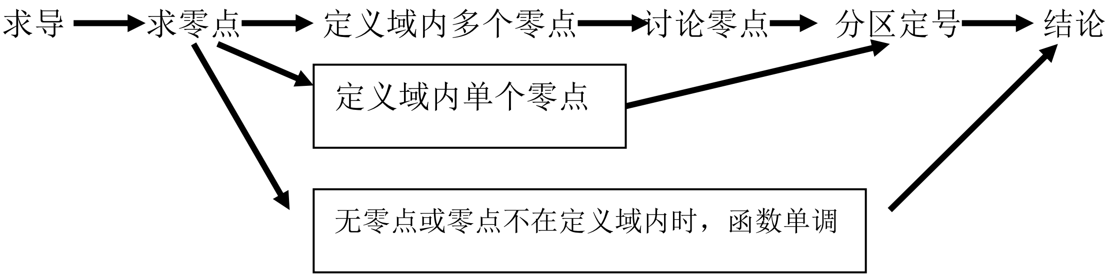
$\dfrac{1}{a}-1>1$ 易知在（0，1）和 $(\dfrac{1}{a}-1,+\infty)$ 上为负，在 $(1,\dfrac{1}{a}-1)$ 上为正。

$f(x)$ 在（0，1）和 $(\dfrac{1}{a}-1,+\infty)$ 上单减，

在 $(1,\dfrac{1}{a}-1)$ 上单增。

（2）可利用（1）的结论易得（略）

从上可知，对单调性的讨论的基本过程为



这样的流程是不是具有普遍性，在解题过程是不是好使，我们再来看看09~13年安徽的导数考题

2009年（19）（本小题满分12分）

已知函数 $f(x)=x-\frac{2}{x}+1-a\ln x$，a＞0，讨论 $f(x)$ 的单调性.

本小题主要考查函数的定义域、利用导数等知识研究函数的单调性，考查分类讨论的思想方法和运算求解的能力。本小题满分12分。

解：$f(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$, $f'(x)=1+\frac{2}{x^2}-\frac{a}{x}=\frac{x^2-ax+2}{x^2}$.

设 $g(x)=x^2-ax+2$,二次方程 $g(x)=0$ 的判别式 $\Delta=a^2-8$.

① 当 $\Delta=a^2-8<0$，即 $0<a<2\sqrt{2}$ 时，对一切 $x>0$ 都有 $f'(x)>0$,此时 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数。

② 当 $\Delta=a^2-8=0$,即 $a=2\sqrt{2}$ 时，仅对 $x=\sqrt{2}$ 有 $f'(x)=0$,对其余的 $x>0$ 都有 $f'(x)>0$,此时 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上也是增函数。

③ 当 $\Delta=a^2-8>0$，即 $a>2\sqrt{2}$ 时，

方程 $g(x)=0$ 有两个不同的实根 $x_1=\frac{a-\sqrt{a^2-8}}{2}$, $x_2=\frac{a+\sqrt{a^2-8}}{2}$, $0<x_1<x_2$.

x	$(0,x_1)$	x_1	(x_1,x_2)	x_2	$(x_2,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	_	0	+
$f(x)$	单调递增	极大值	单调递减	极小值	单调递增

此时 $f(x)$ 在 $(0,\frac{a-\sqrt{a^2-8}}{2})$ 上单调递增，在 $(\frac{a-\sqrt{a^2-8}}{2},\frac{a+\sqrt{a^2-8}}{2})$ 是上单

调递减，在$(\frac{a+\sqrt{a^2-8}}{2},+\infty)$上单调递增.

2010 年 17、（本小题满分 12 分）

设a为实数，函数$f(x)=e^x-2x+2a,x\in\mathbf{R}$。

(Ⅰ)求$f(x)$的单调区间与极值；

(Ⅱ)求证：当$a>\ln 2-1$且$x>0$时，$e^x>x^2-2ax+1$。

(17)（本小题满分 12 分）本题考查导数的运算，利用导数研究函数的单调区间，求函数的极值和证明函数不等式，考查运算能力、综合分析和解决问题的能力.

（Ⅰ）解：由$f(x)=e^x-2x+2a$，$x\in\mathbf{R}$知$f'(x)=e^x-2$，$x\in\mathbf{R}$.

令$f'(x)=0$，得$x=\ln 2$. 于是当x变化时，$f'(x)$，$f(x)$的变化情况如下表：

x	$(-\infty,\ln 2)$	$\ln 2$	$(\ln 2,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	单调递减 ↘	$2(1-\ln 2+a)$	单调递增 ↗

故$f(x)$的单调递减区间是$(-\infty,\ln 2)$，单调递增区间是$(\ln 2,+\infty)$，

$f(x)$在$x=\ln 2$处取得极小值，极小值为$f(\ln 2)=e^{\ln 2}-2\ln 2+2a=2(1-\ln 2+a)$.

（Ⅱ）证：设$g(x)=e^x-x^2+2ax-1$，$x\in\mathbf{R}$. 于是$g'(x)=e^x-2x+2a$，$x\in\mathbf{R}$.

由（Ⅰ）知当$a>\ln 2-1$时，$g'(x)$最小值为$g'(\ln 2)=2(1-\ln 2+a)>0$.

于是对任意$x\in\mathbf{R}$，都有$g'(x)>0$，所以$g(x)$在$\mathbf{R}$内单调递增.

于是当$a>\ln 2-1$时，对任意$x\in(0,+\infty)$，都有$g(x)>g(0)$.

而$g(0)=0$，从而对任意$x\in(0,+\infty)$，$g(x)>0$.

即$e^x-x^2+2ax-1>0$，故$e^x>x^2-2ax+1$.

2011年（16）（本小题满分12分）

设 $f(x)=\frac{e^x}{1+ax}$，其中 a 为正实数

（Ⅰ）当 $a=\frac{4}{3}$ 时，求 $f(x)$ 的极值点；

（Ⅱ）若 $f(x)$ 为 R 上的单调函数，求 a 的取值范围。

（16）（本小题满分12分）本题考查导数的运算，极值点的判断，导数符号与函数单调性之间的关系，求解一元二次不等式等基本知识，考查运算求解能力，综合分析和解决问题的能力.

解：对 $f(x)$ 求导得

$$f'(x)=e^x\frac{1+ax^2-2ax}{(1+ax^2)^2}. \quad ①$$

（Ⅰ）当 $a=\frac{4}{3}$ 时，若 $f'(x)=0$，则 $4x^2-8x+3=0$，解得

$$x_1=\frac{3}{2},\ x_2=\frac{1}{2}.$$

结合①，可知

x	$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$	$\frac{3}{2}$	$\left(\frac{3}{2},\infty\right)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以，$x_1=\frac{3}{2}$ 是极小值点，$x_2=\frac{1}{2}$ 是极大值点.

（Ⅱ）若 $f(x)$ 为 **R** 上的单调函数，则 $f'(x)$ 在 **R** 上不变号，结合①与条件 $a>0$，知

$$ax^2-2ax+1\geqslant 0$$

在 **R** 上恒成立，因此 $\Delta=4a^2-4a=4a(a-1)\leqslant 0$，由此并结合 $a>0$，知 $0<a\leqslant 1$.

2012 年（19）（本小题满分 13 分）

设 $f(x)=ae^{x}+\frac{1}{ae^{x}}+b(a>0)$

（I）求 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上的最小值；

（II）设曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 的切线方程为 $y=\frac{3}{2}x$；求 a,b 的值。

【解析】（I）设 $t=e^{x}(t\geq 1)$；则 $y=at+\frac{1}{at}+b\Rightarrow y'=a-\frac{1}{at^{2}}=\frac{a^{2}t^{2}-1}{at^{2}}$

①当 $a\geq 1$ 时，$y'>0\Rightarrow y=at+\frac{1}{at}+b$ 在 $t\geq 1$ 上是增函数

得：当 $t=1(x=0)$ 时，$f(x)$ 的最小值为 $a+\frac{1}{a}+b$

②当 $0<a<1$ 时，$y=at+\frac{1}{at}+b\geq 2+b$

当且仅当 $at=1(t=e^{x}=\frac{1}{a},x=-\ln a)$ 时，$f(x)$ 的最小值为 $b+2$

（II）$f(x)=ae^{x}+\frac{1}{ae^{x}}+b\Rightarrow f'(x)=ae^{x}-\frac{1}{ae^{x}}$

由题意得：$\begin{cases} f(2)=3 \\ f'(2)=\frac{3}{2} \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} ae^{2}+\frac{1}{ae^{2}}+b=3 \\ ae^{2}-\frac{1}{ae^{2}}=\frac{3}{2} \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=\frac{2}{e^{2}} \\ b=\frac{1}{2} \end{cases}$

2013年（17）（本小题满分12分）

设函数 $f(x)=ax-(1+a^2)x^2$，其中 $a>0$，区间 $I=\{x\mid f(x)>0\}$.

（1） 求 I 的长度（注：区间 (α,β) 的长度定义为 $\beta-\alpha$）；

（2） 给定常数 $k\in(0,1)$，当 $1-k\le a\le 1+k$ 时，求 I 的长度的最小值。

解：（1）因为方程 $ax-(1+a^2)x^2=0(a>0)$ 有两个实根 $x_1=0,x_2=\dfrac{a}{1+a^2}$，故 $f(x)>0$ 的解集为 $\{x\mid x_1<x<x_2\}$，因此区间 $I=(0,\dfrac{a}{1+a^2})$，I 的长度为 $\dfrac{a}{1+a^2}$。

（2）设 $d(a)=\dfrac{a}{1+a^2}$，则 $d'(a)=\dfrac{1-a^2}{(1+a^2)^2}(a>0)$。令 $d'(a)=0$，得 $a=1$。由于 $k\in(0,1)$，

故当 $k-1\le a<1$ 时，$d'(a)>0$，$d(a)$ 单增；当 $1\le a\le 1+k$ 时，$d'(a)<0$，$d(a)$ 单减。

所以当 $1-k\le a\le 1+k$ 时，$d(a)$ 的最小值必定在 $a=k-1$ 或 $a=1+k$ 处取得。

而 $\dfrac{d(1-k)}{d(1+k)}=\dfrac{\dfrac{1-k}{1+(1-k)^2}}{\dfrac{1+k}{1+(1+k)^2}}=\dfrac{2-k^2-k^3}{2-k^2+k^3}<1$

故 $d(1-k)<d(1+k)$。

因此当 $a=1-k$ 时，$d(a)$ 在区间 $[1-k,1+k]$ 上取得最小值 $\dfrac{1-k}{2-2k+k^2}$。

从上可以看出，五年的高考题无一例外的均可用上述流程来解决。其实，在中学导数的应用除与切线相关的问题外，其余的问题如极值问题、最值问题、零点问题、不等式问题等，最终都要落实到单调性上，而讨论函数的单调性必然会经过上述流程，这样一个模板就可以解决相当一部分函数导数题。

最后再看一个例子（黄山市2014届第一次模拟考试第21题）

已知函数 $f(x)=x^2-ax,g(x)=\ln x$

（1） 若函数 $F(x)=f(x)+g(x)$ 既有极大值又有极小值，求实数 a 的取值范围。

（2） 设 $h(x)=f(x)+g(\dfrac{1+ax}{2})$，若对任意的 $a\in(1,2)$，总存在 $x\in[\dfrac{1}{2},1]$，使不等式 $h(x)>k(1-a^2)$ 成立，求实数 k 的取值范围。

分析：（1）$F^{'}(x)=2x-a+\dfrac{1}{x}=\dfrac{2x^2-ax+1}{x}(x>0)$ 由 $F^{'}(x)=0$ 有两不等正实根得

$$\begin{cases}\Delta=a^2-8>0\\ \dfrac{a}{4}>0\\ F(0)=2\times 0^2-a\times 0+1>0\end{cases}\Rightarrow a>2\sqrt{2}$$

（2）由 $h(x)=x^2-ax+\ln\dfrac{ax+1}{2}$ 得 $h^{'}(x)=2x-a+\dfrac{a}{ax+1}==\dfrac{2ax(x-\dfrac{a^2-2}{2a})}{ax+1},x\in[\dfrac{1}{2},1]$

令 $h^{'}(x)=0\Rightarrow x_1=0$ 或 $x_2=\dfrac{a^2-2}{2a}$，由 $a\in(1,2)\Rightarrow x_2=\dfrac{a^2-2}{2a}=\dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{a}\leq\dfrac{2}{2}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore h(x)$ 在 $[\dfrac{1}{2},1]$ 上单增，$\therefore h_{\max}(x)=h(1)=1-a+\ln\dfrac{a+1}{2},a\in(1,2)$。

只要 $k(1-a^2)<h_{\max}(x)$，记 $\varphi(a)=1-a+\ln\dfrac{a+1}{2}-k(1-a^2),a\in(1,2)$

则 $\varphi(a)>0$ 对 $\forall a\in(1,2)$ 恒成立。

$$\varphi^{'}(a)=-1+\frac{1}{a+1}+2ka=\frac{2ka^2+2ka-a}{a+1}=\frac{a(2ka+2k-1)}{a+1}$$

令 $\varphi^{'}(a)=0\Rightarrow a=0$ 或 $2ka+2k-1=0$

当 $k<0$ 时，$a_1=0$ 或 $a_2=\frac{1}{2k}-1<0$，$\varphi^{'}(a)<0$ 对 $\forall a\in(1,2)$ 恒成立，$\varphi(a)$ 单减，

$\varphi(a)<\varphi(1)=0$ 不符题意。

当 $k=0$ 时，$\varphi^{'}(a)=\frac{-a}{a+1}<0$

$\varphi(a)$ 单减，

$\varphi(a)<\varphi(1)=0$ 不符题意

当 $k>0$ 时，$\varphi^{'}(a)=0$ 得

$a_1=0$ 或 $a_2=\frac{1}{2k}-1$，

当 $a_2=\frac{1}{2k}-1>1$ 时，记 $m=\min\{2,\frac{1}{2k}-1\}$，则

$\varphi(a)$ 在 $(1,m)$ 上单减，此时 $\varphi(a)<\varphi(1)=0$ 不符。

当 $a_2=\frac{1}{2k}-1\le 1$ 即 $k\ge\frac{1}{4}$ 时，

$\varphi(a)$ 在 $(1,2)$ 上单增，此时

$\varphi(a)>\varphi(1)>0$，不等式成立。

综上可得：$k\in[\frac{1}{4},+\infty)$ 即为所求。

本题有一定的综合性，头绪多，学生得分情况不理想，但用上面的模去套，则条理清晰，完成本题则不困难。

从上面的例子可以看出，只要我们认真去研究高考试题，仔细揣摸命题意图，高考的命题规律还是有迹可循的，在二、三轮复习中，将高考试题的解题规律呈现给学生对提高学生的解题能力，提升学生的自信心是很有帮助的。