高三数学周三附加题训练 5　　2019/10/9

班级____________　姓名____________　学号___________

1.已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & -2\\ 1 & -3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$，设 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{AB}$.

(1) 求矩阵 $\boldsymbol{M}$;

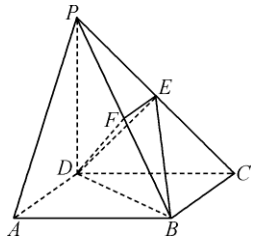
(2) 求矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的特征值.

2.已知曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=2\cos\theta$，直线 l 的极坐标方程为 $\rho\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=m$.若直线 l 与曲线 C 有且只有一个公共点，求实数 m 的值.

3. 如图，在底面为正方形的四棱锥 PABCD 中，侧棱 PD⊥底面 ABCD，PD＝DC，点 E 是线段 PC 的中点．

(1) 求异面直线 AP 与 BE 所成角的大小；

(2) 若点 F 在线段 PB 上，使得二面角 FDEB 的正弦值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$，求$\frac{PF}{PB}$的值．



4.甲、乙两人轮流投篮，每人每次投一次篮，先投中者获胜．投篮进行到有人获胜或每人都已投球 3 次时结束．设甲每次投篮命中的概率为$\frac{2}{5}$，乙每次投篮命中的概率为$\frac{2}{3}$，且各次投篮互不影响．现由甲先投．

(1) 求甲获胜的概率；

(2) 求投篮结束时甲的投篮次数 X 的分布列与期望．

周三附加题训练 5 答案　　2019/10/9

1 解：(1) $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}2 & -2\\1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 2\\1 & 3\end{bmatrix}$.(5 分)

(2) 矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的特征多项式为

$f(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -2\\-1 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-3)-2$.

令 $f(\lambda)=0$，解得 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=4$，

所以矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的特征值为 1 或 4.(10 分)

2 解：曲线 C 化为直角坐标方程为 $x^2+y^2=2x$.即$(x-1)^2+y^2=1$，

直线 l 化为直角坐标方程为 $x+\sqrt{3}y-2m=0$. 所以$\frac{|1-2m|}{2}=1$，解得 $m=-\frac{1}{2}$或 $m=\frac{3}{2}$.

3 解：(1) $\overrightarrow{AP}=(-2,0,2)$，$\overrightarrow{BE}=(-2,-1,1)$，$\cos\langle\overrightarrow{AP},\overrightarrow{BE}\rangle=\frac{\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BE}}{|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{BE}|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

从而$\langle\overrightarrow{AP},\overrightarrow{BE}\rangle=\frac{\pi}{6}$.异面直线 AP 与 BE 所成角的大小为$\frac{\pi}{6}$.(4 分)

(2) $\boldsymbol{m}=(2\lambda-1,-\lambda,\lambda)$为平面 DEF 的一个法向量．设 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$为平面 DEB 的一个法向量，$\boldsymbol{n}=(1,-1,1)$为平面 BDE 的一个法向量．(8 分)

因为二面角 FDEB 的正弦值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以二面角 FDEB 的余弦值为$\frac{\sqrt{6}}{3}$，

即$|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{\sqrt{6}}{3}$，化简得 $4\lambda^2=1$.因为点 F 在线段 PB 上，所以 $0\leqslant\lambda\leqslant1$，

所以 $\lambda=\frac{1}{2}$，即$\frac{PF}{PB}=\frac{1}{2}$.(10 分)

4.解：(1) 设甲第 i 次投中获胜的事件为 $A_i(i=1,2,3)$，则 A_1，A_2，A_3 彼此互斥．

甲获胜的事件为 $A_1+A_2+A_3$.

$P(A_1)=\frac{2}{5}$；$P(A_2)=\frac{3}{5}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}=\frac{2}{25}$；$P(A_3)=\left(\frac{3}{5}\right)^2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{2}{5}=\frac{2}{125}$.

所以 $P(A_1+A_2+A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=\frac{2}{5}+\frac{2}{25}+\frac{2}{125}=\frac{62}{125}$.

答：甲获胜的概率为$\frac{62}{125}$.(4 分)

(2) X 所有可能取的值为 1，2，3.

则 $P(X=1)=\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{5}$；

$P(X=2)=\frac{2}{25}+\frac{3}{5}\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{25}$；

$P(X=3)=\left(\frac{3}{5}\right)^2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times1=\frac{1}{25}$.

即 X 的概率分布列为

X	1	2	3
P	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{1}{25}$

(8 分)

所以 X 的数学期望 $E(X)=1\times\frac{4}{5}+2\times\frac{4}{25}+3\times\frac{1}{25}=\frac{31}{25}$.(10 分)