江苏省仪征中学 2020 届高三（上）期中考试热身练习 1

班级_________ 姓名_________ 学号_________ 评价_________

一、填空题：

1.已知集合 $A=\{x\,|\,x^2-2x=0\}$， $B=\{0,1,2\}$，则 $A\cap B=$________.

2.复数 $z=(1-2i)^2+i$ 的实部为________.

3.函数 $y=2\sin(2x-\dfrac{\pi}{6})$ 的图像中，离坐标原点最近的一条对称轴的方程为________.

4.在平面直角坐标系中，直线 $x-\sqrt{3}y+2\sqrt{3}=0$ 被圆 $x^2+y^2=4$ 截得的弦长为________.

5.已知点 $P(1,m)$ 是函数 $y=ax+\dfrac{2}{x}$ 图像上的点，直线 $x+y=b$ 是该函数图像在 P 点处的切线，则 $a+b-m=$________.

6.设 P 为 ΔABC 中线 AD 的中点，D 为边 BC 中点，且 $AD=2$，若 $\overrightarrow{PB}\bullet\overrightarrow{PC}=-3$，则 $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}=$________.

7. 已知函数 $f(x)=x|x-2|$，则不等式 $f(\sqrt{2}-x)\le f(1)$的解集为________.

8.已知抛物线 $y^2=2px$ 的准线方与双曲线 $x^2-y^2=2$ 的做准线重合，则 $p=$________.

9. 在平面直角坐标系中，O 为原点，$A(-1,0),B(0,\sqrt{3}),C(3,0)$，动点 D 满足 $\left|\overrightarrow{CD}\right|=1$，则 $\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}\right|$ 的最大值是________.

10. 设 $a>b>0$，则 $a+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{a-b}$ 的最小值为________.

11. 在平面直角坐标系中，A,B 分别是 x 轴和 y 轴上的动点，若以 AB 为直径的圆 C 与直线 $2x+y-4=0$ 相切，则圆 C 面积的最小值为______________.

12. 已知三次函数 $f\left(x\right)=\dfrac{a}{3}x^3+\dfrac{b}{2}x^2+cd+d(a<b)$ 的导函数为 $f'\left(x\right)$，导函数 $f'\left(x\right)$ 的导函数为 $f''\left(x\right)$，如果对任意的 $x\in R$，不等式 $f'\left(x\right)\ge f''\left(x\right)$ 恒成立，则 $\dfrac{b^2}{a^2+2c^2}$ 的最大值为____.

二、解答题：

1. 在ΔABC中，角A,B,C的对边分别为a,b,c，已知a,b,c成等比数列，且$\cos B=\dfrac{3}{4}$

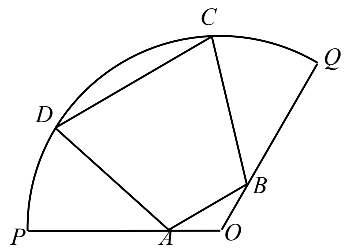
（1）若$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\dfrac{3}{2}$，求$a+c$的值；（2）求$\dfrac{\cos A}{\sin A}+\dfrac{\cos C}{\sin C}$的值。

.

2. 为丰富市民的文化生活，市政府计划在一块半径为 200 m，圆心角为 120° 的扇形地上建造市民广场．规划设计如图：内接梯形 $ABCD$ 区域为运动休闲区，其中 A，B 分别在半径 OP，OQ 上，C，D 在圆弧 PQ 上，CD∥AB；△OAB 区域为文化展示区，AB 长为$50\sqrt{3}$ m；其余空地为绿化区域，且 CD 长不得超过 200 m．

（1）试确定 A，B 的位置，使△OAB 的周长最大？

（2）当△OAB 的周长最大时，设∠DOC=2θ，试将运动休闲区 $ABCD$ 的面积 S 表示为θ的函数，并求出 S 的最大值．



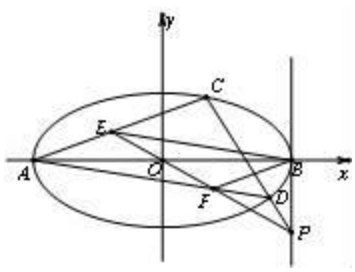
（第 2 题）

3 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，A、B 分别是椭圆：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 的左、右顶点，P（2，t）（t∈R，且 t≠0）为直线 x=2 上一动点，过点 P 任意引一直线 l 与椭圆交于 C、D，连结 PO，直线 PO 分别和 AC、AD 连线交于 E、F.

（1）当直线 l 恰好经过椭圆右焦点和上顶点时，求 t 的值；

（2）若 t=﹣1，记直线 AC、AD 的斜率分别为 k_1，k_2，求证：$\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}$定值；

（3）求证：四边形 AFBE 为平行四边形.



三、附加题：

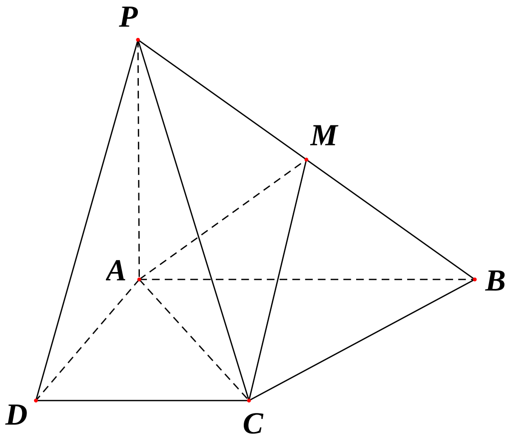
1.设$\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$是矩阵$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}a & 2\\3 & 2\end{bmatrix}$的一个特征向量，求实数 a 的值.

2. 已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为直角梯形，$AB//CD, \angle DAB=90°, PA\perp$ 底面 $ABCD$,且 $PA=AD=DC=\frac{1}{2}AB=1, M$ 是 PB 的中点.

（1）证明：平面 $PAD\perp$ 平面 PCD；

（2）求 AC 与 PB 所成角的余弦值；

（3）求平面 AMC 与平面 BMC 所成二面角（锐角）的余弦值.



3.某公司有 10 万元资金用于投资，如果投资甲项目，根据市场分析知道：一年后可能获利 10%，可能损失 10%，可能不陪不赚，这三种情况发生的概率分别为 $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4}$；如果投资乙项目，一年后可能获利 20%，可能损失 20%，这两种情况发生的概率分别为α和β（α+β=1）.

（1）如果把 10 万元投资甲项目，用 X 表示投资收益（收益=回收资金−投资资金），求 X 的概率分布列及数学期望 E（X）.

（2）若 10 万元资金投资乙项目的平均收益不低于投资甲项目的平均收益，求α的取值范围.

答案：

一、填空题：

1. $\{0,2\}$； 2. -3； 3. $-\dfrac{\pi}{6}$； 4. 2； 5. 2； 6. 0； 7. [－1，＋∞)；8.2； 9. $\sqrt{7}+1$； 10. 4；
11. $\dfrac{4}{5}\pi$； 12. $\sqrt{6}-2$.

二、解答题

1. 在ΔABC中，角A,B,C的对边分别为a,b,c，已知a,b,c成等比数列，且$\cos B=\dfrac{3}{4}$

（1）若$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\dfrac{3}{2}$，求$a+c$的值；（2）求$\dfrac{\cos A}{\sin A}+\dfrac{\cos C}{\sin C}$的值。

解:(1)由$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\dfrac{3}{2}$ 可得$ac\cdot cosB=\dfrac{3}{2}$,因为

$cosB=\dfrac{3}{4}$,所以$b^2=ac=2$.

由余弦定理$b^2=a^2+c^2-2accosB$,得

$a^2+c^2=b^2+2accosB=5$,

则$(a+c)^2=a^2+c^2+2ac=9$,故$a+c=3$

.

(2)由$cosB=\dfrac{3}{4}$可得$sinB=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$.

由$b^2=ac$及正弦定理得$sin^2B=sinAsinC$,

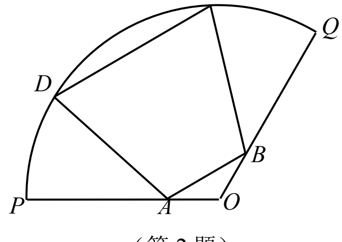
于是

$$\frac{cosA}{sinA}+\frac{cosC}{sinC}=\frac{sinCcosA+cosCsinA}{sinAsinC}=\frac{sin(A+C)}{sin^2B}=\frac{sinB}{sin^2B}=\frac{1}{sinB}=\frac{4\sqrt{7}}{7}$$

2. 为丰富市民的文化生活，市政府计划在一块半径为200 m，圆心角为120°的扇形地上建造市民广场．规划设计如图：内接梯形$ABCD$区域为运动休闲区，其中A，B分别在半径OP，OQ上，C，D在圆弧PQ上，CD∥AB；△OAB区域为文化展示区，AB长为$50\sqrt{3}$ m；其余空地为绿化区域，且CD长不得超过200 m.

（1）试确定A，B的位置，使△OAB的周长最大？

（2）当△OAB的周长最大时，设∠DOC=2θ，试将运动休闲区$ABCD$的面积S表示为θ的函数，并求出S的最大值.



（第2题）

解：（1）设 $OA=m, OB=n, m, n\in(0, 200]$，

在△OAB中，$AB^2=OA^2+OB^2-2OA\cdot OB\cdot\cos\dfrac{2\pi}{3}$，

即 $(50\sqrt{3})^2=m^2+n^2+mn$，　　…………………2 分

所以，$(50\sqrt{3})^2=(m+n)^2-mn\geqslant(m+n)^2-\dfrac{(m+n)^2}{4}=\dfrac{3}{4}(m+n)^2$，

所以 $m+n\leqslant 100$，当且仅当 $m=n=50$ 时，$m+n$ 取得最大值，此时

△OAB周长取得最大值.

答：当 OA、OB 都为 50 m 时，△OAB 的周长最大.　…………………………………6 分

（2）当△AOB 的周长最大时，梯形 $ACBD$ 为等腰梯形.

过 O 作 $OF\perp CD$ 交 CD 于 F，交 AB 于 E，

则 E、F 分别为 AB，CD 的中点，

所以 $\angle DOE=\theta$，由 $CD\leqslant 200$，得 $\theta\in(0, \dfrac{\pi}{6}]$.　………………………………………8 分

在△ODF中，$DF=200\sin\theta, OF=200\cos\theta$.

又在△AOE中，$OE=OA\cos\dfrac{\pi}{3}=25$，故 $EF=200\cos\theta-25$.　…………………………10 分

所以，$S=\dfrac{1}{2}(50\sqrt{3}+400\sin\theta)(200\cos\theta-25)$

$=625(\sqrt{3}+8\sin\theta)(8\cos\theta-1)$

$=625(8\sqrt{3}\cos\theta-8\sin\theta+64\sin\theta\cos\theta-\sqrt{3})$，$\theta\in(0, \dfrac{\pi}{6}]$.（**不交代范围扣 2 分**）12 分

令 $f(\theta)=8\sqrt{3}\cos\theta-8\sin\theta+64\sin\theta\cos\theta-\sqrt{3}$，$\theta\in(0, \dfrac{\pi}{6}]$，

$f'(\theta)=-8\sqrt{3}\sin\theta-8\cos\theta+64\cos 2\theta=-16\sin(\theta+\dfrac{\pi}{6})+64\cos 2\theta$，$\theta\in(0, \dfrac{\pi}{6}]$，

又 $y=-16\sin(\theta+\dfrac{\pi}{6})$ 及 $y=\cos 2\theta$ 在 $\theta\in(0, \dfrac{\pi}{6}]$ 上均为单调递减函数，

故 $f'(\theta)$ 在 $\theta\in(0, \dfrac{\pi}{6}]$ 上为单调递减函数.

因 $f'(\dfrac{\pi}{6})=-16(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-4\times\dfrac{1}{2})>0$，故 $f'(\theta)>0$ 在 $\theta\in(0, \dfrac{\pi}{6}]$ 上恒成立，

于是，$f(\theta)$ 在 $\theta\in(0, \dfrac{\pi}{6}]$ 上为单调递增函数.　…………………………………………… 14 分

所以当 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ 时，$f(\theta)$ 有最大值，此时 S 有最大值为 $625(8+15\sqrt{3})$.

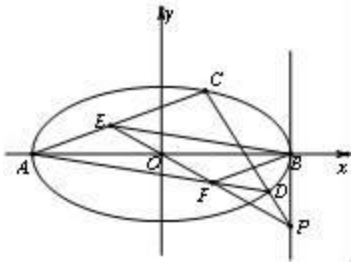
答：当 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ 时，梯形 $ABCD$ 面积有最大值，且最大值为 $625(8+15\sqrt{3})$ m^2.　……………16 分

3 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，A、B 分别是椭圆：$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 的左、右顶点，P（2，t）（t∈R，且 t≠0）为直线 x=2 上一动点，过点 P 任意引一直线 l 与椭圆交于 C、D，连结 PO，直线 PO 分别和 AC、AD 连线交于 E、F.

（1）当直线 l 恰好经过椭圆右焦点和上顶点时，求 t 的值；

（2）若 t=－1，记直线 AC、AD 的斜率分别为 k_1，k_2，求证：$\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}$定值；

（3）求证：四边形 AFBE 为平行四边形.



19、（1）解：由题意：椭圆：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$上顶点 C（0，1），

右焦点 E（$-\sqrt{3}$，0），

所以 l：$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+1$，

令 x=2，得 $t=1-\frac{2\sqrt{3}}{3}$. …

（2）证明：直线 AC：$y=k_1(x+2)$，与$\frac{x^2}{4}+y^2=1$联立

得 C：$\begin{cases} x=\frac{2-8k_1^2}{1+4k_1^2} \\ y=\frac{4k_1}{1+4k_1^2} \end{cases}$，同理得 D：$\begin{cases} x=\frac{2-8k_2^2}{1+4k_2^2} \\ y=\frac{4k_2}{1+4k_2^2} \end{cases}$，…

由 C，D，P 三点共线得：$k_{CP}=k_{DP}$，得$\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}=-4$（定值）. …

（3）证明：要证四边形 AFBE 为平行四边形，即只需证 E、F 的中点即点 O，

设点 P（2，t），则 OP：$y=\frac{t}{2}x$，

分别与直线 AC：$y=k_1(x+2)$与 AD：$y=k_2(x+2)$联立得：

$x_E=\frac{4k_1}{t-2k_1}$，$x_F=\frac{4k_2}{t-2k_2}$，下证：$x_E+x_F=0$，即$\frac{4k_1}{t-2k_1}+\frac{4k_2}{t-2k_2}=0$

化简得：$t(k_1+k_2)-4k_1k_2=0$…

由（2）知 C：$\begin{cases} x=\frac{2-8k_1^2}{1+4k_1^2} \\ y=\frac{4k_1}{1+4k_1^2} \end{cases}$，D：$\begin{cases} x=\frac{2-8k_2^2}{1+4k_2^2} \\ y=\frac{4k_2}{1+4k_2^2} \end{cases}$，

由 C，D，P 三点共线得：$k_{CP}=k_{DP}$，得 $t(k_1+k_2)-4k_1k_2=0$，

所以四边形 AFBE 为平行四边形.

三、附加题：

1.设$\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$是矩阵$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}a&2\\3&2\end{bmatrix}$的一个特征向量，求实数$a$的值.

解：设$\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$是矩阵$\boldsymbol{M}$属于特征值$\lambda$的一个特征向量，

则$\begin{bmatrix}a&2\\3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$， …… 5 分

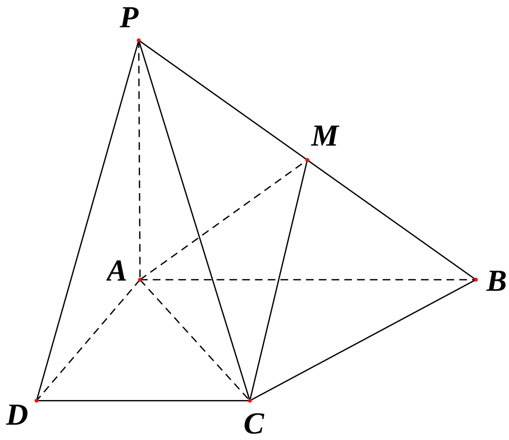
故$\begin{cases}2a+6=2\lambda,\\12=3\lambda,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}\lambda=4,\\a=1.\end{cases}$ …… 10 分

2. 已知四棱锥$P-ABCD$的底面为直角梯形，$AB//CD,\angle DAB=90°,PA\perp$底面$ABCD$,且$PA=AD=DC=\dfrac{1}{2}AB=1,M$是$PB$的中点.

（1）证明：平面$PAD\perp$平面PCD；

（2）求AC与PB所成角的余弦值；

（3）求平面AMC与平面BMC所成二面角（锐角）的余弦值.



解：建立如图所示的空间直角坐标系，

则

$A(0,0,0),D(1,0,0),P(0,0,1),B(0,2,0),C(1,1,0),M(0,1,\frac{1}{2})$，

（1）证明：因为$\overrightarrow{AP}=(0,0,1),\overrightarrow{DC}=(0,1,0)$，

故$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{DC}=0$,所以$AP\perp DC$，

由题设知$AD\perp DC$，且AP与AD是平面PAD内的两条相交直线，

由此得$DC\perp$面PAD，又$DC\subset$面PCD，故平面$PAD\perp$面PCD.

（2）因$\overrightarrow{AC}=(1,1,0),\overrightarrow{PB}=(0,2,-1)$, $\therefore|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{2},|\overrightarrow{PB}|=\sqrt{5},\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{PB}=2$,

$$\therefore\cos<\overrightarrow{AC},\overrightarrow{PB}>=\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{PB}|}=\frac{\sqrt{10}}{5}.$$

（3）设平面AMC的一个法向量为$\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$，

则$\overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{AM}$，$\therefore\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{AM}=(x_1,y_1,z_1)\cdot(0,1,\frac{1}{2})=y_1+\frac{1}{2}z_1=0$，

又$\overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{AC}$，$\therefore\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{AC}=(x_1,y_1,z_1)\cdot(1,1,0)=x_1+y_1=0$，

取$x_1=1$，得$y_1=-1,z_1=2$，故$\overrightarrow{n_1}=(1,-1,2)$，

同理可得面BMC的一个法向量为$\overrightarrow{n_2}=(1,1,2)$，

$\because \cos < \overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2} >= \frac{\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|} = \frac{1-1+4}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}} = \frac{2}{3}$,

$\therefore$ 平面 AMC 与平面 BMC 所成二面角（锐角）的余弦值为 $\frac{2}{3}$.

3.某公司有 10 万元资金用于投资，如果投资甲项目，根据市场分析知道：一年后可能获利 10%，可能损失 10%，可能不陪不赚，这三种情况发生的概率分别为 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$；如果投资乙项目，一年后可能获利 20%，可能损失 20%，这两种情况发生的概率分别为α和β（α+β=1）.

（1）如果把 10 万元投资甲项目，用 X 表示投资收益（收益=回收资金−投资资金），求 X 的概率分布列及数学期望 E（X）.

（2）若 10 万元资金投资乙项目的平均收益不低于投资甲项目的平均收益，求α的取值范围.

23．解：(1)依题意，X 的可能取值为 1,0，−1， ……………………………………………2 分

X 的分布列为

X	1	0	−1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

……………………………4 分

$E(X) = 1 \times \frac{1}{3} - 1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$. ……………………………………………………5 分

(2)设 Y 表示 10 万元投资乙项目的收益，则 Y 的分布列为：

Y	2	−2
P	α	β

……………………8 分

$E(Y)=2\alpha-2\beta=4\alpha-2$，依题意要求 $4\alpha-2 \geqslant \frac{1}{4}$，$\therefore \frac{9}{16} \leqslant \alpha \leqslant 1$. …………………… 10 分