

3.3.2 一元二次不等式的解法

一、学习目标

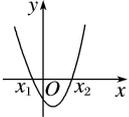
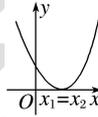
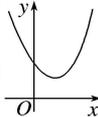
- 1.从函数观点看一元二次方程. 了解二次函数的零点与方程根的关系.
- 2.从函数观点看一元二次不等式. 经历从实际情景中抽象出一元二次不等式的过程, 了解一元二次不等式的现实意义.
- 3.借助一元二次函数的图象, 了解一元二次不等式与相应函数、方程的联系.

二、课前自学 (阅读课本第 60 页)

知识点一 一元二次不等式的概念

定义: 只含有一个 _____, 并且未知数的最高次数是 _____ 的整式不等式, 叫作一元二次不等式

知识点二 二次函数与一元二次方程、不等式的解的对应关系

判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a > 0)$ 的图象			
一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a > 0)$ 的根	有两个不相等的实数根 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$	有两个相等的实数根 $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$	没有实数根
$ax^2 + bx + c > 0 (a > 0)$ 的解集			
$ax^2 + bx + c < 0 (a > 0)$ 的解集			

思考 一元二次不等式与一元二次函数有什么关系?

答案 一元二次不等式 $ax^2 + bx + c > 0 (a > 0)$ 的解集就是一元二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a > 0)$ 的图象在 x 轴上方的点的横坐标 x 的集合; $ax^2 + bx + c < 0 (a > 0)$ 的解集就是一元二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a > 0)$ 的图象在 x 轴下方的点的横坐标 x 的集合.

三、问题探究

例 1 (课本 P61 页例 2)

反思感悟 解一元二次不等式的一般步骤

第一步, 将一元二次不等式化为一端为 0 的形式 (习惯上二次项系数大于 0).

第二步, 求出相应一元二次方程的根, 或判断出方程没有实根.

第三步, 画出相应二次函数示意草图, 方程有根的将根标在图中.

第四步, 观察图象中位于 x 轴上方或下方的部分, 对比不等式中不等号的方向, 写出解集.

例 2. 解下列不等式:

$$(1) \frac{1-x}{3x+5} \geq 0;$$

$$(2) \frac{x-1}{x+2} > 1.$$

反思感悟 分式不等式的解法

(1) 对于比较简单的分式不等式, 可直接转化为一元二次不等式或一元一次不等式组求解, 但要注意等价变形, 保证分母不为零.

(2) 对于不等号右边不为零的较复杂的分式不等式, 先移项再通分(不要去分母), 使不等号右边为零, 然后再用上述方法求解.

例 3. 已知关于 x 的不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $\left\{x \mid -\frac{1}{3} \leq x \leq 2\right\}$, 求关于 x 的不等式 $cx^2+bx+a<0$ 的解集.

反思感悟 已知以 a, b, c 为参数的不等式(如 $ax^2+bx+c>0$)的解集, 求解其他不等式的解集时, 一般遵循:

(1) 根据解集来判断二次项系数的符号;

(2) 根据根与系数的关系把 b, c 用 a 表示出来并代入所要解的不等式;

(3) 约去 a , 将不等式化为具体的一元二次不等式求解.

四、反馈练习

1. (课本 P61 页第 1、2、3、5 题)

2. 对 $\forall x \in \mathbf{R}$, 不等式 $mx^2-mx-1<0$, 求 m 的取值范围.

五、小结