

江苏省仪征中学 2020-2021 学年第二学期高二数学

周末练习 (4)

2021.4.3

一、单项选择题 (本大题共 8 小题, 共 40.0 分)

1. 有不同的语文书 9 本, 不同的数学书 7 本, 不同的英语书 5 本, 从中选出不属于同一学科的书 2 本, 则不同的选法有()

A. 21 种 B. 315 种 C. 153 种 D. 143 种

【答案】D

【解析】

【分析】

本题考查分类与分步计数原理的应用, 属于基础题.

可以分三类, 再根据分类计数原理进行研究得出答案.

【解答】

解: 可分三类: 第一类: 语文、数学各 1 本, 共有 $9 \times 7 = 63$ 种;

第二类: 语文、英语各 1 本, 共有 $9 \times 5 = 45$ 种;

第三类: 数学、英语各 1 本, 共有 $7 \times 5 = 35$ 种,

$\therefore$ 共有 $63 + 45 + 35 = 143$ 种不同的选法.

故选 D.

2. 已知复数 $z = \frac{(3i-1)(1-i)}{i^{2019}}$ (i 为虚数单位), 则下列说法正确的是()

A. z 的虚部为 4
B. 复数 z 在复平面内对应的点位于第三象限
C. z 的共轭复数 $\bar{z} = 4 - 2i$
D. $|z| = 2\sqrt{5}$

【答案】D

【解析】

【分析】

本题主要考查的是复数的概念及运算, 属于基础题.

先求出复数 z , 再逐项进行判断即可.

【解答】

解: 因为 $z = \frac{(3i-1)(1-i)}{i^{2019}} = \frac{2+4i}{-i} = -4 + 2i$,

z 的虚部为 2, 所以 A 错误;

复数 z 在复平面内对应的点位于第二象限, 所以 B 错误;

$\bar{z} = -4 - 2i$, 所以 C 错误;

$|z| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$, 所以 D 正确.

故选 D .

3. 已知四棱锥 $S-ABCD$ 的底面是正方形且侧棱长与底面边长都相等, E 是 SB 的中点, 则 AE, SD 所成的角的余弦值为()

A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

D. $\frac{2}{3}$

【答案】 C

【解析】 解: 建立如图所示坐标系,

令正四棱锥的棱长为 2, 则 $A(1, -1, 0)$, $D(-1, -1, 0)$,

$$S(0, 0, \sqrt{2}), E(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}),$$

$$\overrightarrow{AE} = (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}),$$

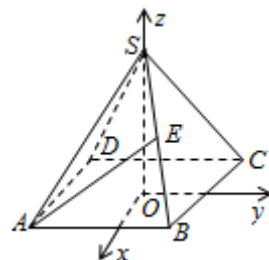
$$\overrightarrow{SD} = (-1, -1, -\sqrt{2})$$

$$\therefore \cos \langle \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{SD} \rangle = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

故选: C .

由于是正方体, 又是求角问题, 所以易选用向量量, 所以建立如图所示坐标系, 先求得相关点的坐标, 进而求得相关向量的坐标, 最后用向量夹角公式求解.

本题主要考查多面体的结构特征和空间角的求法, 同时, 还考查了转化思想和运算能力, 属中档题.



4. 若用 0, 1, 2, 3, 4, 5 这 6 个数字组成无重复数字且个位数字不是 5 的六位数, 则这样的六位数共有()个

A. 470

B. 504

C. 540

D. 288

【答案】 B

【解析】

【分析】

本题考查分类加法、分步乘法计数原理, 排列组合的应用, 属于基础题.

根据首位是 5, 不是 5 进行分类, 分别计算即可.

【解答】

解：由分类加法计数原理，

当首位是 5 时：后五位共有 $A_5^5 = 120$ 个；

当首位不是 5 时：依次排首、末、中间四位共有 $C_4^1 C_4^1 A_4^4 = 384$ 个；

综上，共有 $120 + 384 = 504$ 个六位数.

故选 B.

5. 6 名同学到甲、乙、丙三个场馆做志愿者，每名同学只能去 1 个场馆，则不同的安排方法共有

A. 729

B. 726

C. 543

D. 540

【答案】A

【解析】

【分析】

本题考查排列、组合的综合应用，两个计数原理的综合应用，属于基础题.

方法一：根据题意按 6 名志愿者去了的场馆总数进行分类：①6 名志愿者都去 1 个场馆；

②去 2 个场馆；③去了 3 个场馆，分别计算再相加可得答案.

方法二：根据分步乘法计数原理

【解答】

解：方法一：按 6 名志愿者去了的场馆总数进行分类：

①6 名志愿者都去 1 个场馆有： $C_3^1 = 3$ 种；

②6 名志愿者共去 2 个场馆有： $C_3^2 [(C_2^1)^6 - C_2^1] = 186$ 种；

③6 名志愿者共去了 3 个场馆有： $\left(\frac{C_6^4 C_2^1 C_1^1}{A_2^2} + C_6^3 C_3^2 C_1^1 + \frac{C_6^2 C_4^2 C_2^2}{A_3^3} \right) \cdot A_3^3 = 540$ 种，

$\therefore$ 总的方法数 $N = 3 + 186 + 540 = 729$ 种，

方法二：依题意每名同学都可以去甲、乙、丙三个场馆中的一个，

故每名同学都有 3 方法，根据分步乘法计数原理，共有 $3^6 = 729$ 种方法，

故选 A.

6. 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， $AB = 1, BC = 2, AC = \sqrt{5}, AA_1 = 3, M$ 为线段 BB_1 上的动点，当 $AM + MC_1$ 最小时， MC_1 与面 ABC 所成的角的正弦值是()

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{4}{5}$

D. $\frac{3}{5}$

【答案】A

【解析】

【分析】

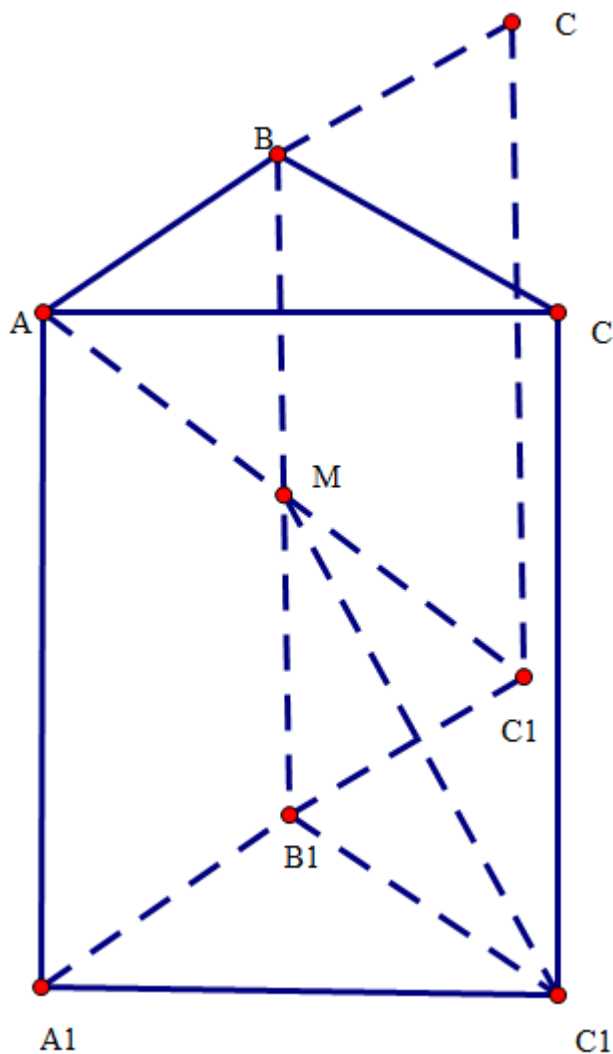
本题考查直线与平面所成的角和立体图形的展开图的应用，属中档题.

将侧面 BB_1C_1C 沿 BB_1 取展开到面 AA_1B_1B 上，连接 AC_1 交 BB_1 于 M ，则此时 $AM + MC_1$ 最小，确定 M 的位置，则 $\angle MC_1B_1$ 等于直线 MC_1 与平面 ABC 所成的角，计算即可得答案.

【解答】

解：如图所示，

将侧面 BB_1C_1C 沿 BB_1 取展开到面 AA_1B_1B 上，连接 AC_1 交 BB_1 于 M ，连接 MC_1 ，则此时 $AM + MC_1$ 最小，



因为 $AB = 1$ ， $BC = 2$ ， $A_1A = 3$ ，由平面几何易知， $BM = 1$ ， $MB_1 = 2$ ，

因为 $ABC - A_1B_1C_1$ 为直三棱柱，则过 $BB_1 \perp$ 面 $A_1B_1C_1$ ，则 $\angle MC_1B_1$ 就是直线 MC_1 与平面 $A_1B_1C_1$ 所成的角.

在直角 $\triangle MB_1C_1$ 中， $B_1M = B_1C_1 = 2$ ，则 $\angle MC_1B_1 = 45^\circ$ ，

$$\therefore \sin \angle MC_1B_1 = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

又因为上下底面平行，所以 MC_1 与面 ABC 所成的角等于直线 MC_1 与平面 $A_1B_1C_1$ 所成的角，

即 MC_1 与面 ABC 所成的角的正弦值是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$,

故选 A.

7. 设奇函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, 且 $f(x)$ 的图象是连续不间断, $\forall x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$, 有

$f'(x)\cos x - f(x)\sin x < 0$, 若 $f(t)\cos t < \frac{1}{2}f(\frac{\pi}{3})$, 则 t 的取值范围是()

- A. $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3})$ B. $(0, \frac{\pi}{3})$ C. $(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3})$ D. $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$

【答案】D

【解析】

【分析】

本题考查利用导数研究函数的单调性问题, 属于较难题.

构造函数 $g(x) = f(x)\cos x$, 利用导数判断 $g(x)$ 的单调性, 再判断奇偶性, 进一步可得 t 的范围.

【解答】

解: 令 $g(x) = f(x)\cos x$, 则 $g'(x) = f'(x)\cos x - f(x)\sin x$.

因为 $\forall x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$, 有 $f'(x)\cos x - f(x)\sin x < 0$,

所以当 $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ 时, $g'(x) < 0$,

则 $g(x) = f(x)\cos x$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ 上单调递减.

又 $f(x)$ 是定义域在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上的奇函数,

所以 $g(-x) = f(-x)\cos(-x) = -f(x)\cos x = -g(x)$,

则 $g(x) = f(x)\cos x$ 也是 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上的奇函数并且单调递减,

又 $f(t)\cos t < \frac{1}{2}f(\frac{\pi}{3})$, 等价于 $f(t)\cos t - \frac{1}{2}f(\frac{\pi}{3}) < 0$,

即 $g(t) < g(\frac{\pi}{3})$,

所以 $t > \frac{\pi}{3}$, 又 $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$,

所以 $\frac{\pi}{3} < t < \frac{\pi}{2}$.

故选 D.

8. 已知函数 $f(x) = x^2 + 2^x + 2^{-x}$, 若不等式 $f(1 - ax) < f(2 + x^2)$ 对任意 $x \in R$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是()

- A. $(-2\sqrt{3}, 2)$ B. $(-2, 2\sqrt{3})$ C. $(-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ D. $(-2, 2)$

【答案】D

【解析】

【分析】

本题主要考查偶函数的单调性和一元二次不等式的恒成立问题，属于中档题.

结合题意，得到函数 $f(x) = x^2 + 2^x + 2^{-x}$ 是 R 上的偶函数，且 $y = f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是增函数. 不等式 $f(ax - 1) < f(2 + x^2)$ 恒成立，等价于 $|ax - 1| < 2 + x^2$ ，即 $-2 - x^2 < ax - 1 < 2 + x^2$ 恒成立，由判别式即可得出结果.

【解答】

解：因为函数 $f(x) = x^2 + 2^x + 2^{-x}$ 是 R 上的偶函数，

又当 $x \geq 0$ 时， $f'(x) = 2x + \ln 2(2^x - 2^{-x}) \geq 0$ ，

所以函数 $y = f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是增函数.

所以不等式 $f(ax - 1) < f(2 + x^2)$ 恒成立，等价于 $|ax - 1| < 2 + x^2$ ，

即 $-2 - x^2 < ax - 1 < 2 + x^2$ 恒成立，

整理得 $\begin{cases} x^2 + ax + 1 > 0 \\ x^2 - ax + 3 > 0 \end{cases}$ 的解集为 R ，

$\therefore$ 由判别式得 $a^2 - 4 < 0$ 且 $(-a)^2 - 12 < 0$ ，

解得 $-2 < a < 2$ ，

故选 D.

二、多项选择题（本大题共 4 小题，共 20.0 分）

9. 已知 i 为虚数单位，则下面命题正确的是()

- A. 若复数 $z = 3 + i$ ，则 $\frac{1}{z} = \frac{3}{10} - \frac{i}{10}$.
B. 复数 z 满足 $|z - 2i| = 1$ ， z 在复平面内对应的点为 (x, y) ，则 $x^2 + (y - 2)^2 = 1$.
C. 若复数 z_1, z_2 满足 $z_1 = \bar{z}_2$ ，则 $z_1 z_2 \geq 0$.
D. 复数 $z = 1 - 3i$ 的虚部是 3.

【答案】ABC

【解析】

【分析】

本题考查复数的有关概念及复数的几何意义、复数的四则运算，属于基础题.

通过对各个选项逐一判断即可.

【解答】

解: A.若复数 $z = 3 + i$, 则 $\frac{1}{z} = \frac{1}{3+i} = \frac{3-i}{10} = \frac{3}{10} - \frac{i}{10}$, 正确;

B. $|z - 2i| = 1$, z 在复平面内对应的点为 (x, y) , 得 $\sqrt{x^2 + (y - 2)^2} = 1$, 即 $x^2 + (y - 2)^2 = 1$, 正确;

C. 复数 z_1, z_2 满足 $z_1 = \bar{z}_2$, 设 $z_2 = a + bi (a \in R, b \in R)$, 则 $z_1 = a - bi$, 则 $z_1 z_2 = a^2 + b^2 \geq 0$, 正确;

D. 复数 $z = 1 - 3i$ 的虚部是 -3 , D 不正确.

故选 ABC.

10. 已知函数 $y = f(x)$ 在 R 上可导, 且 $f(0) = 1$, 其导函数 $f'(x)$ 满足 $\frac{f'(x) - f(x)}{x - 1} > 0$, 对

于函数 $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$, 下列结论正确的是()

A. 函数 $g(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上为单调递增函数

B. $x = 1$ 是函数 $g(x)$ 的极小值点

C. 函数 $g(x)$ 至多有两个零点

D. $x \leq 0$ 时, 不等式 $f(x) \leq e^x$ 恒成立

【答案】ABC

【解析】

【分析】

本题考查导数的应用问题, 利用导数研究函数的单调性, 零点个数的判断, 属于较难题.

构造函数 $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$, 利用 $\frac{f'(x) - f(x)}{x - 1} > 0$, 可得函数 $g(x)$ 的单调性, 所以可结合选项得结果.

【解答】

解: 构造函数 $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$, 则 $g'(x) = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x}$,

根据 $\frac{f'(x) - f(x)}{x - 1} > 0$, 得

当 $x > 1$ 时, 函数 $g(x)$ 为增函数; 当 $x < 1$ 时, 函数 $g(x)$ 为减函数, A 正确;

$\therefore x = 1$ 为函数 $g(x)$ 的极小值点, B 正确;

当 $g(1) > 0$ 时, 函数 $y = g(x)$ 没有零点; 当 $g(1) = 0$ 时, 函数 $y = g(x)$ 有 1 个零点; 当 $g(1) < 0$ 时, 函数 $y = g(x)$ 至多有两个零点,

故 $y = g(x)$ 至多有两个零点, C 正确;

$\because g(0) = \frac{f(0)}{e^0} = 1$, 当 $x < 1$ 时, 函数 $g(x)$ 为减函数,

$\therefore$ 当 $x \leq 0$ 时, $g(x) \geq g(0) = 1$, 即 $\frac{f(x)}{e^x} \geq 1$, 所以 $f(x) \geq e^x$, D 错误.

故选 C .

11. 在四棱锥 $S-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为矩形, $SA \perp$ 平面 $ABCD$, $AB = 1$, $AD = AS = 2$, P

是棱 SD 上一点, 且 $SP = \frac{1}{2}PD$, 下列结论中正确的有()

A. AP 与 BC 所成的角为 45°

B. 直线 AB 与 CP 所成角的余弦值为 $\frac{3\sqrt{41}}{41}$

C. 点 P 到平面 $ABCD$ 的距离为 $\frac{4}{3}$

D. 二面角 $A-PC-D$ 的余弦值 $\frac{\sqrt{42}}{42}$

【答案】BCD

【解析】

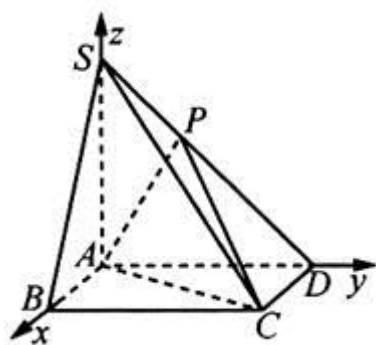
【分析】

本题考查两直线所成角的余弦值的求法, 考查二面角的余弦值的求法, 考查点到平面的距离求法, 综合性较强, 是较难题, 解题时要认真审题, 注意向量法的合理运用.

以 A 为原点, AB 为 x 轴, AD 为 y 轴, AS 为 z 轴, 建立空间直角坐标系, 利用向量法可求 AP 与 BC 所成的角和直线 AB 与 CP 所成角的余弦值. 求出平面 APC 的法向量和平面 SCD 的法向量, 利用向量法能求出二面角 $A-PC-D$ 的余弦值, 过点 P 作 $PE \perp AD$ 交于 E , 故可求得 PE 就是点 P 到平面 $ABCD$ 的距离, 故可得答案.

【解答】

解: 如图, 分别以 AB , AD , AS 所在直线为 x 轴, y 轴, z 轴建立空间直角坐标系,



则 $A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $C(1,2,0)$, $D(0,2,0)$, $S(0,0,2)$.

设 $P(x_0, y_0, z_0)$, 由 $\overrightarrow{SP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SD}$, 得 $(x_0, y_0, z_0 - 2) = \frac{1}{3}(0, 2, -2)$,

所以 $x_0 = 0$, $y_0 = \frac{2}{3}$, $z_0 = \frac{4}{3}$, 点 P 的坐标为 $(0, \frac{2}{3}, \frac{4}{3})$.

所以 $\overrightarrow{CP} = (-1, -\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$, $\overrightarrow{AP} = (0, \frac{2}{3}, \frac{4}{3})$, $\overrightarrow{BC} = (0, 2, 0)$, $\overrightarrow{AB} = (1, 0, 0)$,

设直线 AP 与 BC 所成的角为 β ,

$$\cos \beta = \frac{\frac{4}{3}}{\sqrt{0 + (\frac{2}{3})^2 + (\frac{4}{3})^2} \times 2} = \frac{\sqrt{5}}{5}, \text{ 故 } A \text{ 错};$$

设直线 AB 与 CP 所成的角为 α ,

$$\text{则 } \cos \alpha = \frac{|-1 \times 1 + (-\frac{4}{3}) \times 0 + \frac{4}{3} \times 0|}{\sqrt{1 + (-\frac{4}{3})^2 + (\frac{4}{3})^2} \times 1} = \frac{3\sqrt{41}}{41}, \text{ 故 } B \text{ 正确};$$

设平面 APC 的一个法向量为 $\vec{m} = (x_1, y_1, z_1)$,

$$\text{所以 } \begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{AC} = x_1 + 2y_1 = 0, \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}y_1 + \frac{4}{3}z_1 = 0. \end{cases} \text{ 令 } y_1 = -2, \text{ 则 } x_1 = 4, z_1 = 1, \vec{m} = (4, -2, 1),$$

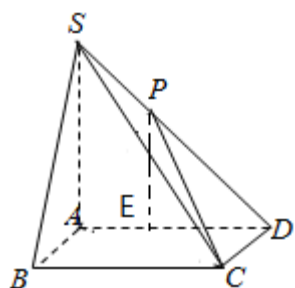
设平面 SCD 的一个法向量为 $\vec{n} = (x_2, y_2, z_2)$, 由于 $\overrightarrow{DC} = (1, 0, 0)$, $\overrightarrow{DS} = (0, -2, 2)$,

$$\text{所以 } \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{DC} = x_2 = 0, \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{DS} = -2y_2 + 2z_2 = 0. \end{cases} \text{ 令 } y_2 = 1, \text{ 则 } z_2 = 1, \vec{n} = (0, 1, 1),$$

设二面角 $A-PC-D$ 的大小为 θ , 由于 $\cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{0 \times 4 + 1 \times (-2) + 1 \times 1}{\sqrt{2} \times \sqrt{21}} = -\frac{\sqrt{42}}{42}$,

所以, $\cos \theta = \frac{\sqrt{42}}{42}$, 故 D 正确;

过点 P 作 $PE \perp AD$ 交于 E ,



因为 $SA \perp$ 平面 $ABCD$, $PE \parallel SA$,

故可得 $PE \perp$ 平面 $ABCD$, 所以 $PE = \frac{2}{3} \times 2 = \frac{4}{3}$,

故可得点 P 到平面 $ABCD$ 的距离为 $\frac{4}{3}$, 故 C 正确;

故选 BCD .

12. 实数 a 在下列哪些范围内函数 $f(x) = x(\ln x - ax)$ 有两个极值点()

A. $(0, \frac{1}{4})$

B. $(0, \frac{1}{2})$

C. $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$

D. $(0, +\infty)$

【答案】ABC

【解析】

【分析】

本题考查导数中的函数零点问题，考查利用导数研究函数的单调性和极值，属于中档题.

由条件得 $f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个不同的零点，即 $2a = \frac{\ln x + 1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个不同的

根. 利用导数求出 $g(x) = \frac{\ln x + 1}{x}$ 的单调性和极值，结合图象即可得到结果.

【解答】

解： $\because f(x) = x(\ln x - ax)$,

$$\therefore f'(x) = \ln x - 2ax + 1,$$

由题意知， $f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个不同的零点.

$$\text{令 } f'(x) = 0, \text{ 得 } 2a = \frac{\ln x + 1}{x}.$$

$$\text{设 } g(x) = \frac{\ln x + 1}{x}, \text{ 则 } g'(x) = \frac{-\ln x}{x^2}.$$

$\therefore g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增，在 $(1, +\infty)$ 上单调递减.

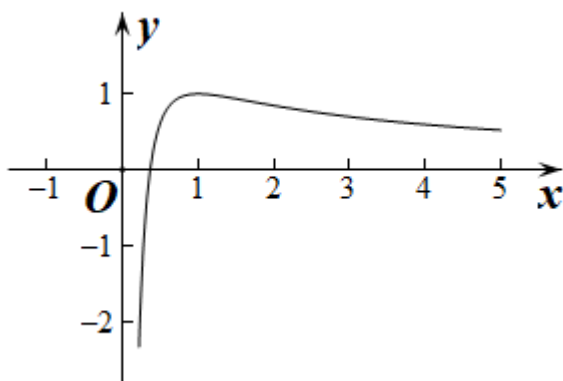
$\because$ 当 $x \rightarrow 0$ 时， $g(x) \rightarrow -\infty$ ；当 $x \rightarrow +\infty$ 时， $g(x) \rightarrow 0$.

$$\therefore g(x)_{\max} = g(1) = 1.$$

$$\therefore 0 < 2a < 1.$$

$$\therefore 0 < a < \frac{1}{2}.$$

故选 ABC.



三、填空题（本大题共 4 小题，共 20.0 分）

13. 如图, 一个地区分为 5 个行政区域, 现给地图着色, 要求相邻区域不得使用同一颜色. 现有 4 种颜色可供选择, 则不同的着色方法共有_____种. (以数字作答)



【答案】72

【解析】

【试题解析】

【分析】

本题主要考查排列组合的应用, 以及分类加法计数原理, 分步乘法计数原理, 属于中档题.

根据题意, 分 2 种情况讨论: 若选 3 种颜色时, 就是 ② ④ 同色, ③ ⑤ 同色; 若 4 种颜色全用, 只能 ② ④ 或 ③ ⑤ 用一种颜色, 其它不相同, 求解即可.

【解答】

解: 由题意, 选用 3 种颜色时: 则 ② ④ 同色, ③ ⑤ 同色, 涂色方法: $C_4^3 A_3^3 = 24$ 种,

4 色全用时涂色方法: 则 ② ④ 或 ③ ⑤ 用一种颜色, 涂色方法: $C_2^1 A_4^4 = 48$ 种,

所以不同的着色方法共有 $24 + 48 = 72$ 种.

故答案为 72.

14. 设复数 z 满足条件 $|z| = 1$, 那么 $|z + 2\sqrt{2} + i|$ 的最大值是_____.

【答案】4

【解析】

【分析】本题考查复数的模以及几何意义, 属于中档题.

$|z|$ 表示的是复平面内表示复数 z 的点与原点之间的距离, 等式 $|z| = 1$ 表示的是复平面内表示复数 z 的点到原点的距离为 1, 则复数 z 在复平面内的轨迹是以原点为圆心, 以 1 为半径的圆, 代数式 $|z + 2\sqrt{2} + i|$ 的是复平面内表示复数 z 的点到点 $(-2\sqrt{2}, -1)$ 的距离, 由此可以得到答案.

【解答】解: $|z|$ 表示的是复平面内表示复数 z 的点与原点之间的距离, 等式 $|z| = 1$ 表示的是复平面内表示复数 z 的点到原点的距离为 1, 则复数 z 在复平面内的轨迹是以原点为圆心, 以 1 为半径的圆, 代数式 $|z + 2\sqrt{2} + i|$ 的是复平面内表示复数 z 的点到点 $(-2\sqrt{2}, -1)$ 的距离, 而点 $(-2\sqrt{2}, -1)$ 到原点的距离为 3, 故 $|z + 2\sqrt{2} + i|$ 的最大值为

$$3 + 1 = 4.$$

15. 定义方程 $f(x) = f'(x)$ 的实数根 x_0 叫做函数 $f(x)$ 的“新驻点”. (1) 设 $f(x) = \sin x$, 则 $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上的“新驻点”为_____.

(2) 如果函数 $g(x) = \ln(x+1)$ 与 $h(x) = x + e^x$ 的“新驻点”分别为 α 、 β 、那么 α 和 β 的大小关系是_____.

【答案】 (1) $\frac{\pi}{4}$; (2) $\alpha < \beta$.

【解析】

【分析】

本题考查导数的计算, 是新定义的题型, 关键是理解“新驻点”的定义. 属于中档题目.

(1) 根据题意, 求出函数 $f(x)$ 的导数, 由“新驻点”的定义可得 $\cos x = \sin x$, 变形可得 $\tan x = 1$, 结合 x 的范围分析可 x 的值, 即得答案;

(2) 根据题意, 求出 $h(x)$ 与 $g(x)$ 的导数, 由“新驻点”的定义可得 α 的取值范围, 分析求出 β 的值, 比较即可得答案.

【解答】

解: (1) $\because f(x) = \sin x$, $\therefore f'(x) = \cos x$,

令 $f(x) = f'(x)$, 即 $\sin x = \cos x$, 得 $\tan x = 1$,

$\because x \in (0, \pi)$, 解得 $x = \frac{\pi}{4}$,

所以, 函数 $y = f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上的“新驻点”为 $\frac{\pi}{4}$;

(2) $\because g(x) = \ln(x+1)$, $h(x) = x + e^x$,

则 $g'(x) = \frac{1}{x+1}$, $h'(x) = 1 + e^x$,

令 $\varphi(x) = \ln(x+1) - \frac{1}{x+1}$, 则 $\varphi'(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} > 0$ 对任意的 $x \in (-1, +\infty)$ 恒成

立,

所以, 函数 $\varphi(x) = \ln(x+1) - \frac{1}{x+1}$ 在定义域 $(-1, +\infty)$ 上为增函数,

$$\because \varphi(0) = -1 < 0, \quad \varphi(1) = \ln 2 - \frac{1}{2} = \ln 2 - \ln \sqrt{e} > 0,$$

由零点存在可得 $\alpha \in (0, 1)$,

令 $h(x) = h'(x)$, 可得 $x = 1$, 即 $\beta = 1$, 所以, $\alpha < \beta$.

故答案为: (1) $\frac{\pi}{4}$; (2) $\alpha < \beta$.

16. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2 - mx + 2, & x < 0 \\ \ln x - mx, & x > 0 \end{cases}$, 若方程 $f(x) = x$ 恰有三个零点, 则实数 m 的取值范围为_____.

【答案】 $m < -2\sqrt{2} - 1$

【解析】

【分析】

本题考查函数零点与方程根的关系以及分段函数, 函数图象的应用, 属于较难题.

将题意转化为直线 $y = m + 1$ 与 $g(x) = \begin{cases} x + \frac{2}{x}, & x < 0 \\ \frac{\ln x}{x}, & x > 0 \end{cases}$ 的图像有三个不同的交点是解题的关键.

【解答】

解: 因为 $f(x) = \begin{cases} x^2 - mx + 2, & x < 0 \\ \ln x - mx, & x > 0 \end{cases}$, 且方程 $f(x) = x$ 恰有三个零点,

所以直线 $y = m + 1$ 与 $g(x) = \begin{cases} x + \frac{2}{x}, & x < 0 \\ \frac{\ln x}{x}, & x > 0 \end{cases}$ 的图像有三个不同的交点,

$$\text{当 } x < 0 \text{ 时, } g(x) = x + \frac{2}{x}, \quad g'(x) = 1 - \frac{2}{x^2} = \frac{x^2 - 2}{x^2},$$

当 $x < -\sqrt{2}$ 时, $g'(x) > 0$; 当 $-\sqrt{2} < x < 0$ 时, $g'(x) < 0$;

所以 $g(x)$ 在 $(-\infty, -\sqrt{2})$ 上单调递增; 在 $(-\sqrt{2}, 0)$ 上单调递减;

当 $x = -\sqrt{2}$ 时, $g(x)$ 取得极大值 $g(-\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}$.

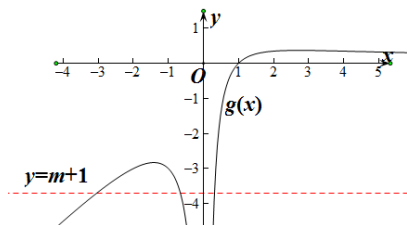
$$\text{当 } x > 0 \text{ 时, } g(x) = \frac{\ln x}{x}, \quad g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2},$$

当 $0 < x < e$ 时, $g'(x) > 0$; 当 $x > e$ 时, $g'(x) < 0$;

所以 $g(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增; 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减;

当 $x = e$ 时, $g(x)$ 取得极大值 $g(e) = \frac{1}{e}$, 且 $x > e$ 时, $g(x)$ 恒大于 0,

作出函数 $g(x)$ 的图象, 如图所示:



由图可知, 当 $m + 1 < g(-\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}$, 即 $m < -2\sqrt{2} - 1$ 时, 直线 $y = m + 1$ 与 $g(x)$ 的图像有三个不同的交点.

综上所述, 实数 m 的取值范围为 $m < -2\sqrt{2} - 1$.

四、解答题 (本大题共 6 小题, 共 72.0 分)

17. 已知复数 $z = (2 + i)m + \frac{2i}{i-1}$ (其中 i 是虚数单位, $m \in \mathbb{R}$).

(1) 若复数 z 是纯虚数, 求 m 的值;

(2) 求 $|z - 1|$ 的取值范围.

【答案】 解: $z = (2 + i)m + \frac{2i}{i-1} = 2m + mi + \frac{2i(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)} = (2m + 1) + (m - 1)i$.

(1) $\because$ 复数 z 是纯虚数, $\therefore \begin{cases} 2m + 1 = 0 \\ m - 1 \neq 0 \end{cases}$, 即 $m = -\frac{1}{2}$;

(2) $z - 1 = 2m + (m - 1)i$,

$$|z - 1| = \sqrt{4m^2 + (m - 1)^2} = \sqrt{5m^2 - 2m + 1} = \sqrt{5(m - \frac{1}{5})^2 + \frac{4}{5}} \geq \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$\therefore |z - 1|$ 的取值范围是 $[\frac{2\sqrt{5}}{5}, +\infty)$.

【解析】 【试题解析】

本题考查复数代数形式的运算, 考查复数的概念, 考查复数模的求法, 是基础题.

(1) 利用复数代数形式的乘除运算化简 z . 由实部为 0 且虚部不为 0 列式求得 m 值;

(2) 求出 $|z - 1|$, 利用配方法求范围.

18. 用 0, 1, 2, 3, 4 这五个数字组成无重复数字的自然数.

(1) 在组成的三位数中, 求所有偶数的个数;

(2)在组成的三位数中，如果十位上的数字比百位上的数字和个位上的数字都小，则称这个数为“凹数”，如 301，423 等都是“凹数”，试求“凹数”的个数；

(3)在组成的五位数中，求恰有一个偶数数字夹在两个奇数数字之间的自然数的个数.

【答案】解：(1)将所有的三位偶数分为两类：①若个位数为 0，则共有 $A_4^2 = 12$ (种)；

②若个位数为 2 或 4，则共有 $2 \times 3 \times 3 = 18$ (种).

所以共有 30 个符合题意的偶数.

(2)将这些“凹数”分为三类：①若十位数字为 0，则共有 $A_4^2 = 12$ (种)；

②若十位数字为 1，则共有 $A_3^2 = 6$ (种)；

③若十位数字为 2，则共有 $A_2^2 = 2$ (种).

所以共有 20 个符合题意的“凹数”.

(3)将符合题意的五位数分为三类：

①若两个奇数数字在一、三位置，则共有 $A_2^2 \cdot A_3^3 = 12$ (种)；

②若两个奇数数字在二、四位置，则共有 $A_2^2 \cdot C_2^1 \cdot A_2^2 = 8$ (种)；

③若两个奇数数字在三、五位置，则共有 $A_2^2 \cdot C_2^1 \cdot A_2^2 = 8$ (种).

所以共有 28 个符合题意的五位数.

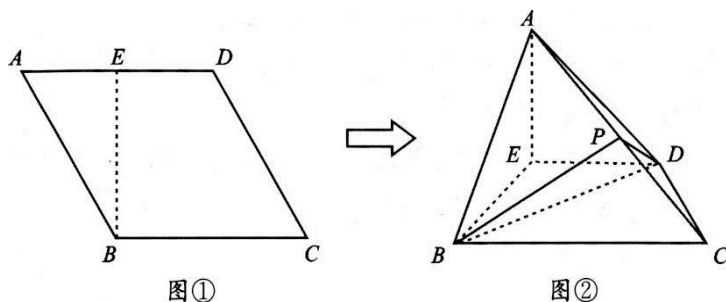
【解析】本题主要考查两个计数原理的运用，属于中档题.

(1)分个位数是 0 或 2、4 两类组成三位数即可；

(2)按十位数字为 0，1，2 三类组成三位“凹数”即可；

(3)按要求两个奇数夹一个偶数，分奇数在一三、二四、三五位置三种情况考虑，再考虑其他元素排法即可.

19. 如图①，在菱形 $ABCD$ 中， $\angle A = 60^\circ$ 且 $AB = 2$ ， E 为 AD 的中点. 将 $\triangle ABE$ 沿 BE 折起使 $AD = \sqrt{2}$ ，得到如图②所示的四棱锥 $A - BCDE$.



(I)求证: 平面 $ABE \perp$ 平面 ABC ;

(II)若 P 为 AC 的中点, 求二面角 $P-BD-C$ 的余弦值.

【答案】 证明: (I)在图①中, 连接 BD .

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为菱形, $\angle A = 60^\circ$, $\therefore \triangle ABD$ 是等边三角形.

$\because E$ 为 AD 的中点, $\therefore BE \perp AE, BE \perp DE$.

又 $AD = AB = 2$, $\therefore AE = DE = 1$.

在图②中, $AD = \sqrt{2}$, $\therefore AE^2 + ED^2 = AD^2$.

$\therefore AE \perp ED$.

$\because BC \parallel DE$, $\therefore BC \perp BE, BC \perp AE$.

又 $BE \cap AE = E$, $AE, BE \subset$ 平面 ABE .

$\therefore BC \perp$ 平面 ABE .

$\because BC \subset$ 平面 ABC , $\therefore$ 平面 $ABE \perp$ 平面 ABC .

解: (II)由(I), 知 $AE \perp DE, AE \perp BE$.

$\because BE \cap DE = E$, $BE, DE \subset$ 平面 $BCDE$.

$\therefore AE \perp$ 平面 $BCDE$.

以 E 为坐标原点, $\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EA}$ 的方向分别为 x 轴, y 轴, z 轴正方向, 建立如图所示的空间直角坐标系 $Exyz$.

则 $E(0,0, 0), A(0,0, 1), B(\sqrt{3},0, 0), C(\sqrt{3},2, 0), D(0,1, 0)$.

$\because P$ 为 AC 的中点, $\therefore P(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1, \frac{1}{2})$.

$\therefore \overrightarrow{PB} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -1, -\frac{1}{2}), \overrightarrow{PD} = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{1}{2})$.

设平面 PBD 的一个法向量为 $\vec{m} = (x, y, z)$.

$$\text{由} \begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{PB} = 0, \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{PD} = 0 \end{cases} \text{得} \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}x - y - \frac{1}{2}z = 0, \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}z = 0. \end{cases}$$

令 $z = \sqrt{3}$, 得 $\vec{m} = (-1, -\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

又平面 BCD 的一个法向量为 $\overrightarrow{EA} = (0,0, 1)$.



$\therefore$ 二面角 $P-BD-C$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

(I) 推导出 $BE \perp AE$, $BE \perp DE$, 且 $BC \parallel DE$, 从而 $BC \perp$ 平面 ABE , 由此能证明平面 $ABE \perp$ 平面 ABC .

(Ⅱ)以 E 为原点, $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{EA}$ 的方向分别为 x 轴, y 轴, z 轴正方向, 建立空间直角坐标系, 利用向量法能求出二面角 $P-BD-C$ 的余弦值.

(2)当角 θ 取何值时, 健身广场的面积最大?

等腰 $\triangle PCD$ 底边 CD 上的高为 $200 - 200\sin \theta$,

$$\begin{aligned} \text{所以 } S &= 2 \times 200 \cos \theta \times 200 \sin \theta + \frac{1}{2} \times 400 \cos \theta (200 - 200 \sin \theta) \\ &= 80000 \sin \theta \cos \theta + 40000 (\cos \theta - \cos \theta \sin \theta) \end{aligned}$$

$$= 40000(2\sin\theta\cos\theta + \cos\theta - \sin\theta\cos\theta) = 40000(\sin\theta\cos\theta + \cos\theta),$$

$$\text{所以 } S = 40000(\sin\theta\cos\theta + \cos\theta) (0 < \theta < \frac{\pi}{2}).$$

$$(2) \text{ 设 } f(\theta) = \sin\theta\cos\theta + \cos\theta,$$

$$\text{则 } f'(\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta - \sin\theta = -2\sin^2\theta - \sin\theta + 1 = -2(\sin\theta - \frac{1}{2})(\sin\theta + 1),$$

$$\text{由 } f'(\theta) > 0 \text{ 得 } 0 < \theta < \frac{\pi}{6}, f'(\theta) < 0 \text{ 得 } \frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{2},$$

所以 $f(\theta)$ 在 $(0, \frac{\pi}{6})$ 上单调递增, 在 $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$ 上单调递减,

$$\text{所以 } \theta = \frac{\pi}{6} \text{ 时, } f(\theta)_{\max} = f(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4},$$

$$\text{所以 } S_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \times 40000 = 30000\sqrt{3},$$

$$\text{即 } \theta = \frac{\pi}{6} \text{ 时, 健身广场的面积最大, 最大值为 } 3000\sqrt{3} \text{ m}^2.$$

【解析】 本题考查三角函数的实际应用, 考查运用导数解决实际问题, 属于中档题.

(1) 依题意可得 $S = 2 \times 200\cos\theta \times 200\sin\theta + \frac{1}{2} \times 400\cos\theta(200 - 200\sin\theta)$ 化简整理

即可;

(2) 设 $f(\theta) = \sin\theta\cos\theta + \cos\theta$, 通过导数研究单调性, 确定最值即可解题.

21. 已知函数 $f(x) = \ln x - mx + m - n$.

(I) 当 $m = n = 1$ 时, 求曲线 $f(x)$ 经过原点的切线方程;

(II) 若在 $x > 0$ 时, 有 $f(x) \leq 0$ 恒成立, 求 $\frac{n}{m}$ 的最小值.

【答案】 解: (I) 当 $m = n = 1$ 时, $f(x) = \ln x - x$, $f'(x) = \frac{1}{x} - 1$,

设切线与曲线 $f(x)$ 相切于 $(x_0, \ln x_0 - x_0)$, 则切线斜率为 $k = \frac{1}{x_0} - 1$,

得切线方程为 $y - (\ln x_0 - x_0) = (\frac{1}{x_0} - 1)(x - x_0)$, 由它过原点, 代入 $(0, 0)$,

可得 $x_0 = e$, 即切线方程为: $y = (\frac{1}{e} - 1)x$.

(II) 由题知 $f'(x) = \frac{1-mx}{x}$,

① 当 $m < 0$ 时, 恒有 $f'(x) > 0$, 得 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 无最值, 不合题意;

② 当 $m > 0$ 时, 由 $f'(x) = 0$, 得 $x = \frac{1}{m}$, 在 $(0, \frac{1}{m})$ 上, 有 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增;

在 $(\frac{1}{m}, +\infty)$ 上, 有 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减;

则 $f(x)$ 在 $x = \frac{1}{m}$ 取得极大值, 也为最大值,

$$f(x) < f\left(\frac{1}{m}\right) = -\ln m + m - n - 1,$$

由题意 $-\ln m - m - n - 1 \leq 0$ 恒成立,

$$\text{即 } n \geq -\ln m + m - 1 (m > 0)$$

$$\therefore \frac{n}{m} \geq -\frac{\ln m}{m} - \frac{1}{m} + 1 (m > 0),$$

$$\text{再令 } g(m) = -\frac{\ln m}{m} - \frac{1}{m} + 1, \text{ 得 } g'(m) = \frac{\ln m}{m^2},$$

知在 $m \in (0, 1)$ 时, $g'(m) < 0$, $g(m)$ 递减;

知在 $m \in (1, +\infty)$ 时, $g'(m) > 0$, $g(m)$ 递增;

$$\therefore g(m) \geq g(1) = 0,$$

即 $\frac{n}{m}$ 的最小值为 0.

【解析】(I) 先求导数, 根据导数几何意义以及两点连线斜率公式列方程解得切点以及斜率, 最后根据点斜式得切线方程,

(II) 先求 $f(x)$ 的最大值, 再根据不等式, 构造函数 $g(m) = -\frac{\ln m}{m} - \frac{1}{m} + 1$, 最后根据导数确定 $g(m)$ 的最值, 即得结果.

利用导数研究不等式恒成立或存在型问题, 首先要构造函数, 利用导数研究函数的单调性, 求出最值, 进而得出相应的含参不等式, 从而求出参数的取值范围; 也可分离变量, 构造函数, 直接把问题转化为函数的最值问题.

22. 已知函数 $f(x) = \sin x - ax$.

(I) 对于 $x \in (0, 1)$, $f(x) > 0$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围;

(II) 当 $a = 1$ 时, 令 $h(x) = f(x) - \sin x + \ln x + 1$, 求 $h(x)$ 的最大值;

(III) 求证: $\ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} (n \in N^*)$.

【答案】解: (I) $f(x) = \sin x - ax > 0$, $\sin x - ax > 0$,

$$\because 0 < x < 1, \therefore a < \frac{\sin x}{x},$$

$$\text{令 } g(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad g'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$$

$$\text{令 } m(x) = x \cos x - \sin x, \quad m'(x) = \cos x - x \sin x - \cos x = -x \sin x < 0,$$

$\therefore m(x)$ 在 $(0, 1)$ 递减,

$$\therefore m(x) < m(0) = 0,$$

$\therefore g'(x) < 0$, $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 递减,

$$\therefore g(x) > g(1) = \sin 1,$$

$$\therefore a \leq \sin 1;$$

$$(\text{II}) a = 1 \text{ 时, } h(x) = \ln x - x + 1, (x > 0),$$

$$h'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x},$$

$$\text{令 } h'(x) > 0, \text{ 解得: } 0 < x < 1, \text{ 令 } h'(x) < 0, \text{ 解得: } x > 1,$$

$$\therefore h(x) \text{ 在 } (0,1) \text{ 递增, 在 } (1,+\infty) \text{ 递减,}$$

$$\therefore h(x) \text{ 的最大值是 } h(1) = 0;$$

$$\text{证明: (III) 构造函数 } g(x) = \ln(1+x) - x,$$

$$\text{则 } g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x},$$

$$\text{当 } -1 < x < 0 \text{ 时, } g'(x) > 0, g(x) \text{ 在 } (-1,0) \text{ 上单调递增;}$$

$$\text{当 } x > 0 \text{ 时, } g'(x) < 0, g(x) \text{ 在 } (0,+\infty) \text{ 上单调递减;}$$

$$\text{所以, 当 } x = 0 \text{ 时, } g(x) = \ln(1+x) - x \text{ 取得极大值, 也是最大值,}$$

$$\text{所以, } g(x) \leq g(0) = 0, \text{ 即 } \ln(1+x) \leq x, \text{ 当 } x \neq 0 \text{ 时, } \ln(1+x) < x.$$

$$\text{令 } x = \frac{1}{n},$$

$$\text{则 } \ln(1 + \frac{1}{n}) = \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}, \text{ 即 } \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n},$$

$$\therefore \ln 2 - \ln 1 < \frac{1}{2}, \ln 3 - \ln 2 < \frac{1}{3}, \dots,$$

$$\ln n - \ln(n-1) < \frac{1}{n-1}, \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n},$$

$$\text{以上 } n \text{ 个不等式相加得: } \ln(n+1) - \ln 1 < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n},$$

$$\text{即 } \ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} (n \in N^*).$$

【解析】 本题考查函数的单调性、最值问题, 考查不等式的证明, 构造函数

$g(x) = \ln(1+x) - x$, 利用导数法证得 $\ln(1+x) \leq x$ 是关键, 也是难点, 考查创新思维、化归思想与推理论证能力, 属于难题.

(I) 求出函数的导数, 解关于导函数的不等式求出 a 的范围即可;

(II) 求出 $h(x)$ 的导数, 解关于导函数的不等式求出 $h(x)$ 的单调区间, 从而求出 $h(x)$ 的最大值即可;

(III) 构造函数 $f(x) = \ln(1+x) - x$, 利用导数法可证得 $\ln(1+x) \leq x$ (当 $x \neq 0$ 时,

$\ln(1+x) < x$), 令 $x = \frac{1}{n}$, 利用对数函数的运算性质及累加法求和即可证得结论成立.