

高三数学

2021. 1

本试卷共 4 页. 满分 150 分考试时间 120 分钟.

注意事项:

1. 答题前, 考生务必在试题卷、答题卡规定的地方填写自己的准考证号、姓名.
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑, 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其它答案标号. 回答非选择题时, 将答案写在答题卡上, 写在本试卷上无效.
3. 考试结束, 考生必须将试题卷和答题卡一并交回.

一、选择题: 本大题共 8 个小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 若 $(a-bi)i=1+i(a, b \in R)$, 则 $\frac{1}{a+bi} = ()$

- A. $\frac{1+i}{2}$ B. $\frac{1-i}{2}$ C. $\frac{-1+i}{2}$ D. $\frac{-1-i}{2}$

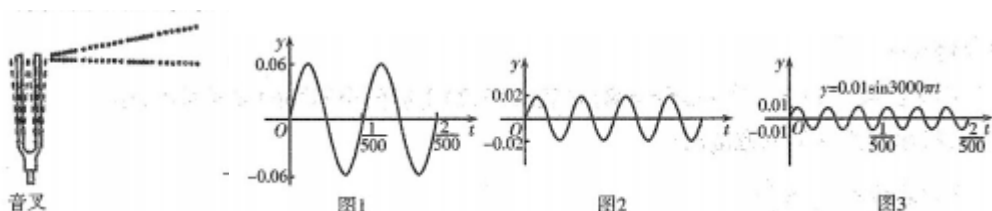
2. 命题 “ $\forall a > 0, a + \frac{1}{a} \geq 2$ ” 的否定是 $()$

- A. $\exists a \leq 0, a + \frac{1}{a} < 2$ B. $\exists a > 0, a + \frac{1}{a} < 2$
C. $\forall a \leq 0, a + \frac{1}{a} \geq 2$ D. $\forall a > 0, a + \frac{1}{a} < 2$

3. 函数 $f(x) = e^x$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程是 $()$

- A. $y = x$ B. $y = x - 1$ C. $y = x + 1$ D. $y = 2x$

4. 音乐, 是人类精神通过无意识计算而获得的愉悦享受, 1807 年法国数学家傅里叶发现代表任何周期性声音的公式是形如 $y = A \sin wx$ 的简单正弦型函数之和, 而且这些正弦型函数的频率都是其中一个最小频率的整数倍, 比如用小提琴演奏的某音叉的声音图象是由下图 1, 2, 3 三个函数图象组成的, 则小提琴演奏的该音叉的声音函数可以为 $()$



- A. $f(t) = 0.06 \sin 1000\pi t + 0.02 \sin 1500\pi t + 0.01 \sin 3000\pi t$
B. $f(t) = 0.06 \sin 500\pi t + 0.02 \sin 2000\pi t + 0.01 \sin 300\pi t$

C. $f(t) = 0.06\sin 1000\pi t + 0.02\sin 2000\pi t + 0.01\sin 3000\pi t$

D. $f(t) = 0.06\sin 1000\pi t + 0.02\sin 2500\pi t + 0.01\sin 3000\pi t$

5. 2020 年 12 月 17 日凌晨, 嫦娥五号返回器携带月球土壤样品, 在预定区域安全着陆. 嫦娥五号是使用长征五号火箭发射成功的, 在不考虑空气阻力的情况下, 火箭的最大速度 v (单位: m/s) 和燃料的质量 M (单位:

kg)、火箭(除燃料外)的质量 m (单位: kg) 的函数关系表达式为 $v = 2000\ln\left(1 + \frac{M}{m}\right)$. 如果火箭的最大速

度达到 $12km/s$, 则燃料的质量与火箭的质量的关系是 ()

A. $M = e^6 m$ B. $Mm = e^6 - 1$ C. $\ln M + \ln m = 6$ D. $\frac{M}{m} = e^6 - 1$

6. 已知某圆锥的侧面展开图是半径为 2 的半圆, 则该圆锥的体积为 ()

A. $\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$ B. $\sqrt{3}\pi$ C. $2\sqrt{3}\pi$ D. 2π

7. 已知抛物线 $C_1: y^2 = 12x$, 圆 $C_2: (x-3)^2 + y^2 = 1$, 若点 A, B 分别在 C_1, C_2 上运动, 点 $M(1,1)$, 则

$|AM| + |AB|$ 的最小值为 ()

A. 2 B. $\sqrt{5}$ C. $2\sqrt{2}$ D. 3

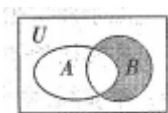
8. 已知定义在 R 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = f(2-x)$, 当 $x \in [-1, 1]$ 时, $f(x) = 3x$, 若函数

$g(x) = f(x) - k(x-2)$ 的所有零点为 $x_i (i=1, 2, 3, \dots, n)$, 当号 $\frac{3}{7} < k < 1$ 时, $\sum_{i=1}^n x_i =$ ()

A. 6 B. 8 C. 10 D. 12

二、多项选择题: 本大题共 4 个小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得 5 分, 选对但不全的得 3 分, 有选错的得 0 分.

9. 设全集为 U , 如图所示的阴影部分用集合可表示为 ()



A. $A \cap B$ B. $C_u A \cap B$ C. $C_u (A \cap B) \cap B$ D. $C_u A \cup B$

10. 某地区机械厂为倡导“大国工匠精神”, 提高对机器零件质量的品质要求, 对现有产品进行抽检, 由抽检结果可知, 该厂机器零件的质量指标值 Z 服从正态分布 $N(200, 224)$, 则 ()

A. $P(185.03 < Z < 200) = 0.6826$

B. $P(200 \leq Z < 229.94) = 0.4772$

C. $P(185.03 < Z < 229.94) = 0.9544$

D. 任取10000件机器零件,其质量指标值位于区间 $(185.03, 229.94)$ 的件数约8185件(附:

$\sqrt{224} \approx 14.97$, 若 $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P(\mu - \sigma < Z < \mu + \sigma) = 0.6826$,

$P(\mu - 2\sigma < Z < \mu + 2\sigma) = 0.9544$)

11. 将函数 $f(x) = \sin 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位, 得到函数 $y = g(x)$ 的图象, 则以下说法正确的是 ()

A. 函数 $g(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ 上单调递增

B. 函数 $y = g(x)$ 的图象关于 $\left(-\frac{\pi}{6}, 0\right)$ 对称

C. $g\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -g(x)$

D. $g\left(\frac{\pi}{6}\right) \geq g(x)$

12. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_{n+1}a_n = 1 + a_n$, $a_1 = 1$, 设 $b_n = \ln a_n (n \in \mathbb{N}^*)$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 则下列选项正确的是 ($\ln 2 \approx 0.693$, $\ln 3 \approx 1.099$) ()

A. 数列 $\{a_{2n-1}\}$ 单调递增, 数列 $\{a_{2n}\}$ 单调递减

B. $b_n + b_{n+1} \leq \ln 3$

C. $S_{2020} > 693$

D. $b_{2n-1} > b_{2n}$

三、填空题 (每题 5 分, 满分 20 分, 将答案填在答题纸上)

13. 已知 $\vec{a} = (1, 1)$, $|\vec{b}| = 2$, 且 $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{a} = 4$, 则向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为_____.

14. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1 (a > 0)$ 的右焦点为 F , 过点 F 作一条渐近线的垂线, 垂足为 P , $\triangle OPF$ 的面积为 2, 则该双曲线的离心率为_____.

15. 通常, 我国民用汽车号牌的编号由两部分组成: 第一部分为汉字表示的省、自治区、直辖市简称和用英文字母表示的发牌机关代号, 第二部分为由阿拉伯数字和英文字母组成的序号, 如图所示. 其中序号的编码规则为:

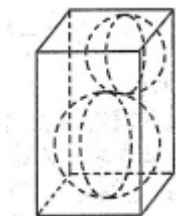
① 由 10 个阿拉伯数字和除 I, 0 之外的 24 个英文字母组成;

② 最多只能有 2 个英文字母.

则采用 5 位序号编码的鲁 V 牌照最多能发放的汽车号牌数为_____万张. (用数字作答).



16. 如图, 在底面边长为2, 高为3的正四棱柱中, 大球与该正四棱柱的五个面均相切, 小球在大球上方且与该正四棱柱的三个面相切, 也与大球相切, 则小球的半径为_____.



三、解答题 (本大题共6小题, 共70分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

17. 在①点 (a_n, S_n) 在直线 $2x - y - 1 = 0$ 上, ② $a_1 = 2, S_n + 1 = 2S_n + 2$,

③ $a_n > 0, a_1 = 1, 2a_{n+1}^2 + 3a_n a_{n+1} - 2a_n^2 = 0$ 这三个条件中任选一个, 补充在下面问题中, 并求解.

问题: 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , _____.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

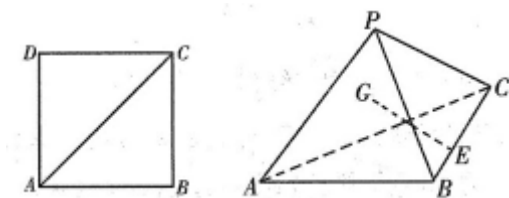
(2) 求 S_n , 并判断 $-S_1, S_n, S_{n+1}$ 是否成等差数列, 且说明理由.

18. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $\sqrt{3}a \cos C - c \sin A = \sqrt{3}b$.

(1) 求 A ;

(2) 若 $c = 2$, 且 BC 边上的中线长为 $\sqrt{3}$, 求 b .

19. 已知正方形 $ABCD$ 的边长为2, 沿 AC 将三角形 ACD 折起到 PAC 位置(如图), G 为三角形 PAC 的重心, 点 E 在边 BC 上, $GE \parallel$ 平面 PAB .



(1) 若 $CE = \lambda EB$, 求 λ 的值;

(2) 若 $GE \perp PA$, 求平面 GEC 与平面 PAC 所成锐二面角的余弦值.

20. 在一个系统中, 每一个设备能正常工作的概率称为设备的可靠度, 而系统能正常工作的概率称为系统的可靠度, 为了增加系统的可靠度, 人们经常使用“备用冗余设备”(即正在使用的设备出故障时才启动的设备).

已知某计算机网络服务器系统采用的是“一用两备”（即一台正常设备，两台备用设备）的配置，这三台设备中，只要有一台能正常工作，计算机网络就不会断掉。设三台设备的可靠度均为 r ($0 < r < 1$)，它们之间相互不影响。

- (1) 要使系统的可靠度不低于 0.992，求 r 的最小值；
- (2) 当 $r = 0.9$ 时，求能正常工作的设备数 X 的分布列；
- (3) 已知某高科技产业园当前的计算机网络中每台设备的可靠度是 0.7，根据以往经验可知，计算机网络断掉可能给该产业园带来约 50 万的经济损失。为减少对该产业园带来的经济损失，有以下两种方案：
 方案 1：更换部分设备的硬件，使得每台设备的可靠度维持在 0.9，更新设备硬件总费用为 8 万元；
 方案 2：对系统的设备进行维护，使得设备可靠度维持在 0.8，设备维护总费用为 5 万元。
 请从期望损失最小的角度判断决策部门该如何决策？

21. 已知点 B 是圆 $C: (x-1)^2 + y^2 = 16$ 上的任意一点，点 $F(-1, 0)$ ，线段 BF 的垂直平分线交 BC 于点 P 。

- (1) 求动点 P 的轨迹 E 的方程；
- (2) 设曲线 E 与 x 轴的两个交点分别为 A_1, A_2 ， Q 为直线 $x = 4$ 上的动点，且 Q 不在 x 轴上， QA_1 与 E 的一个交点为 M ， QA_2 与 E 的另一个交点为 N ，证明： $\triangle FMN$ 的周长为定值。

22. 已知函数 $f(x) = e^{x-1} - ax$ ($a \in \mathbb{R}$) 在区间 $(0, 2)$ 上有两个不同的零点 x_1, x_2 。

- (1) 求实数 a 的取值范围；
- (2) 求证： $x_1 x_2 > \frac{1}{a}$ 。