江苏省仪征中学2019届高三上学期数学周末限时训练13（2018.12.22）

数学Ⅰ

一、填空题：本大题共14小题，每小题5分，共计70分．请把答案填写在答题卡相应位置上．

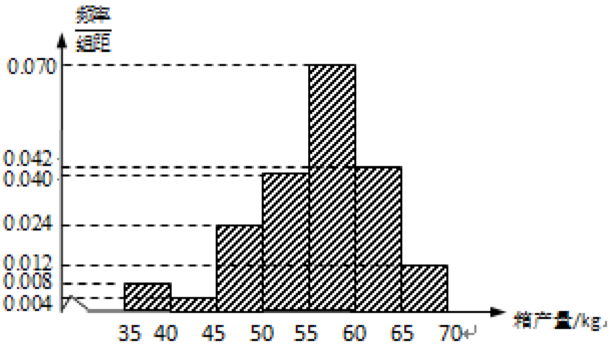
1．集合 $A=\left\{x\,|\,x^2-1>0\right\}, B=\left\{y\,|\,y=3^x, x\in R\right\}$，则 $A\cap B=$_______．

2．若 $\dfrac{m+i}{1+i}=i$（i 为虚数单位），则实数 $m=$________．

3．设 $a\in\mathbf{R}$，则“$a=1$”是“直线 $l_1: ax+2y-2=0$ 与直线 $l_2: x+(a+1)y+2=0$ 平行”的________条件．（填“充分不必要”、“必要不充分”、“充要”或“既不充分也不必要”）

4．若函数 $f(x)=\sin x-\cos x-ax$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上单调递增，则 a 的取值范围是________．

5．某水产养殖场利用200个网箱养殖水产品，收获时测量各箱水产品的产量（单位：kg），其频率分布直方图如图所示，则该养殖场有_______个网箱产量不低于50 kg．



6．已知 $|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，$\vec{a}+\vec{b}=(1,\sqrt{2})$，则向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的夹角为________．

7．已知变量 x,y 满足条件 $\begin{cases} x\geqslant 1 \\ y\leqslant 2 \\ x-y\leqslant 0 \end{cases}$，则 $z=2x+y$ 的最小值是________．

8．已知 $\{a_n\}$ 为等比数列，$\{a_n+1\}$ 为等差数列，且 $a_1=2$，则 a_9 的值为________．

9．设双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的两条渐近线与直线 $x=\dfrac{a^2}{c}$ 分别交于A，B两点，F为该双曲线的右焦点．若 $\dfrac{\pi}{3}\leq\angle AFB<\dfrac{\pi}{2}$，则该双曲线的离心率的取值范围是_______．

10．在平行四边形 $ABCD$ 中，已知 $AB=2$，$AC=\sqrt{7}$，$AD=1$，若点 P、Q 满足 $\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AP}$，$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AQ}$，则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{DQ}$ 的值为________．

11．已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\dfrac{\pi}{6})(\omega>0)$，若 $f(\dfrac{\pi}{6})=f(\dfrac{5\pi}{6})$，且 $f(x)$ 在 $(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6})$ 内有最大值，无最小值，则 $\omega=$________.

12．若曲线 $x^2+y^2=5$ 与曲线 $x^2+y^2-2mx+m^2-20=0\left(m\in\mathbf{R}\right)$ 相交于 A,B 两点，且两曲线在 A 处的切线互相垂直，则 m 的值是____________.

13．已知数列 $\{a_n\}$ 的前 100 项和 $S_{100}=-2^{100}$，且当 $2\leqslant n\leqslant 100$ 时恒有 $a_n=3a_{102-n}+2^n$ 成立，则 $a_1=$________.

14．设 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的可导函数，且对 $\forall x\in\mathbf{R}$ 有 $f'(x)\geqslant f(x)$，若 $f(0)=1, f(2)=e^2$，则 $f(\dfrac{1}{2})$ 的值是________.

二、解答题：本大题共6小题，共计90分．请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15．（本小题满分 14 分）设向量 $\vec{a}=(\sin x,\cos x),\vec{b}=(\cos x,\sqrt{3}\cos x), x\in R$，

函数 $f(x)=\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})$.

（1）求函数 $f(x)$ 的最小正周期；

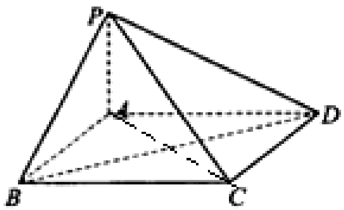
（2）ΔABC 中边 a,b,c 所对的角为 A，B，C，若 $a\cos B+b\cos A=2c\cos C, c=\sqrt{3},$

当 $f(\dfrac{B}{2})$ 取最大值时，求 ΔABC 的面积。

16．（本小题满分 14 分）如图，在四棱锥 P－ABCD 中，ABCD 是菱形，PA⊥平面 ABCD.

（1）求证：BD⊥PC；

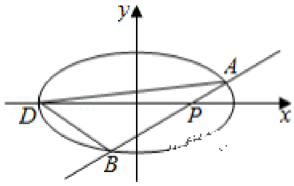
（2）若平面 PBC 与平面 PAD 的交线为 l，求证：BC∥l.



17. （本小题满分 14 分）如图,椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$)的离心率是$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，过点$P$(1，0)的动直线$l$与椭圆相交于$A$，$B$两点，当直线$l$平行于$y$轴时，直线$l$被椭圆$C$截得的线段长为$2\sqrt{2}$.

⑴求椭圆C的方程；

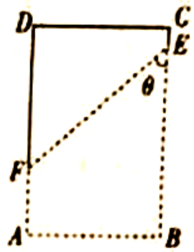
⑵已知D为椭圆的左端点，问: 是否存在直线l使得ΔABD的面积为$\dfrac{10\sqrt{2}}{3}$？若不存在，说明理由，若存在，求出直线l的方程.



18. （本小题满分 16 分）如图，某机械厂欲从 AB=2 米，AD=$2\sqrt{2}$米的矩形铁皮中裁剪出—个四边形 ABEF 加工成某仪器的零件，剪裁要求如下: 点 E、F 分别在边 BC，AD 上，且 EB=EF，AF<BE。设∠BEF=θ，四边形 ABEF 的面积为$f(\theta)$ (单位:平方米）

（1）求$f(\theta)$关于θ的函数关系式，并求出定义域;

（2）当 BE，AF 的长为何值时，裁剪出的四边形 ABEF 的面积最小，并求出最小值。



19. （本小题满分 16 分）数列$\{a_n\}$是公差为d $(d\neq 0)$的等差数列，它的前n项和记为A_n，数列$\{b_n\}$是公比为q $(q\neq 1)$的等比数列，它的前n项和记为B_n. 若$a_1=b_1\neq 0$，且存在不小于3的正整数k,m，使$a_k=b_m$.

（1）若$a_1=1$，$d=2$，$q=3$，$m=4$，求A_k.

（2）若$a_1=1$，$d=2$，试比较A_{2k}与B_{2m}的大小，并说明理由；

（3）若$q=2$，是否存在整数m,k，使$A_k=86B_m$，若存在，求出m,k的值；若不存在，说明理由.

20. （本小题满分 16 分）设函数$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$是奇函数，且当$x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$时，$f(x)$取得极小值$-\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$.

（1）求函数$f(x)$的解析式；

（2）求使得方程$-\dfrac{1}{3}f'(x)-nx+4n+\dfrac{1}{3}=0$仅有整数根的所有正实数$n$的值；

（3）设$g(x)=|f(x)+(3t-1)x|$，（$x\in[-1,1]$），求$g(x)$的最大值$F(t)$.

仪征中学2019届高三上学期数学周末限时训练13参考答案

一、填空题：每小题5分，共计70分.

1．$(1,+\infty)$　　2．-1　　3．充分不必要　　4．$(-\infty,1]$　　5．164　　6．$\dfrac{2\pi}{3}$　　7．3

8．2　　9．$(\sqrt{2},2)$　　10．$\dfrac{1}{6}$　　11．$\dfrac{2}{3}$　　12．± 5　　13．-2　　14．$\sqrt{e}$

二、解答题

15. 解：（1）$f(x)=\sin x(\sin x+\cos x)+\cos x(\cos x+\sqrt{3}\cos x)$

$=\dfrac{1}{2}\sin 2x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x+1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})+1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$…………4分

$\therefore T=\pi$　　…………7分

（2）$\sin A\cos B+\cos A\sin B=2\sin C\cos C$ 即 $\sin(A+B)=\sin C=2\sin C\cos C$

$C\in(0,\pi)$，$\cos C=\dfrac{1}{2},C=\dfrac{\pi}{3}$　　…………10分

又 $f(\dfrac{B}{2})=\sin(B+\dfrac{\pi}{3})+1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ，$\because B\in\left(0,\dfrac{2\pi}{3}\right)$ $\therefore B=\dfrac{\pi}{6}$ 时 $f(\dfrac{B}{2})$ 取到最大值　……12分

此时 $A=\dfrac{\pi}{2}$，又 $c=\sqrt{3},\therefore b=1,S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　…………14分

16. 证明：（1）连结AC、BD，∵在四棱锥P－ABCD中，ABCD是菱形，PA⊥平面ABCD，
∴BD⊥AC，BD⊥PA，∵PA∩AC=A，∴BD⊥平面PAC，∵PC⊂平面PAC，∴BD⊥PC.
…………………………………………………………………7分

（2）∵BC∥AD，BC⊄面PAD，AD⊂面PAD，∴BC∥面PAD.
∵平面PBC与平面PAD的交线为l，∴BC∥l. **……………………14分**

17. 解：（1）$\because$ 椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率是 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，过点 $P(1,0)$ 的动直线 l 与椭圆相交于 A,B 两点，当直线 l 平行于 y 轴时，直线 l 被椭圆 C 截得的线段长为 $2\sqrt{2}$，

$\therefore$ 点 $(1,\sqrt{2})$ 在椭圆 C 上，$\begin{cases}\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{2}{b^2}=1\\ a^2-b^2=c^2\\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$，解得：$a=3,b=\dfrac{3}{2}$，

$\therefore$ 椭圆的方程为 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{4y^2}{9}=1$………………………6分，

（2）当直线 l 与 x 轴平行时，ΔABD 不存在，…………………6分，

$\therefore$ 设直线 l 的方程为 $x=my+1$，并设两点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

联立 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{4y^2}{9}=1\\ x=my+1\end{cases}$，得 $(m^2+4)y^2+2my-8=0$，

其判别式$\Delta=4m^2+32\left(m^2+4\right)=36m^2+128>0$，…………10 分，

$\therefore y_1+y_2=-\dfrac{2m}{m^2+4}$， $y_1y_2=-\dfrac{8}{m^2+4}$，

$\therefore S_{\Delta ABD}=\dfrac{1}{2}|DP||y_1-y_2|=2\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$

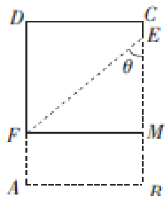
$=2\sqrt{\left(\dfrac{2m}{m^2+4}\right)^2+\dfrac{32}{m^2+4}}=\dfrac{4}{m^2+4}\sqrt{9m^2+32}$ ，…………12 分

假设存在直线l，则有$\dfrac{4}{m^2+4}\sqrt{9m^2+32}=\dfrac{10}{3}\sqrt{2}$，

解得$m^2=2$，负解删除，$\therefore m=\pm\sqrt{2}$，

故存在直线l方程$x=\pm\sqrt{2}y+1$使得$S_{ABD}=\dfrac{10\sqrt{2}}{3}$…………14 分.

18. 解：(1)过点 F 作 $FM\perp BE$，垂足为 M.



在 Rt$\triangle FME$ 中，$MF=2$，$\angle EMF=\dfrac{\pi}{2}$，$\angle FEM=\theta$，

所以 $EF=\dfrac{2}{\sin\theta}$，$ME=\dfrac{2}{\tan\theta}$.

故 $AF=BM=EF-EM=\dfrac{2}{\sin\theta}-\dfrac{2}{\tan\theta}$.

所以 $f(\theta)=\dfrac{1}{2}\times(AF+BE)\times AB=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{2}{\sin\theta}-\dfrac{2}{\tan\theta}+\dfrac{2}{\sin\theta}\right)\times2=\dfrac{4}{\sin\theta}-\dfrac{2}{\tan\theta}$.

据题意，$AF<BE$，所以 $\theta<\dfrac{\pi}{2}$，

且当点 E 重合于点 C 时，$EF=EB=2\sqrt{2}$，$FM=2$，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$.

所以函数 $f(\theta)=\dfrac{4}{\sin\theta}-\dfrac{2}{\tan\theta}$的定义域为$\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$. ………………………………………………………… 7 分

(2)由(1)可知 $f(\theta)=\dfrac{4}{\sin\theta}-\dfrac{2}{\tan\theta}=\dfrac{4\left(\sin^2\dfrac{\theta}{2}+\cos^2\dfrac{\theta}{2}\right)}{2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}}-\dfrac{2}{\dfrac{2\tan\dfrac{\theta}{2}}{1-\tan^2\dfrac{\theta}{2}}}$

$=2\left\{\tan\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{1}{\tan\dfrac{\theta}{2}}\right\}-\left\{\dfrac{1}{\tan\dfrac{\theta}{2}}-\tan\dfrac{\theta}{2}\right\}=3\tan\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{1}{\tan\dfrac{\theta}{2}}\geqslant2\sqrt{3\tan\dfrac{\theta}{2}\times\dfrac{1}{\tan\dfrac{\theta}{2}}}=2\sqrt{3}$，

当且仅当 $3\tan\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1}{\tan\dfrac{\theta}{2}}$时，不等式取等号.

又 $\theta\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\dfrac{\theta}{2}\in\left[\dfrac{\pi}{8},\dfrac{\pi}{4}\right)$，

故 $\tan\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\pi}{6}$，$\theta=\dfrac{\pi}{3}$，$BE=\dfrac{2}{\sin\theta}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，$AF=\dfrac{2}{\sin\theta-\dfrac{2}{\tan\theta}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

所以当 BE，AF 的长分别为$\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$米，$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$米时，裁剪出的四边形 $ABEF$ 的面积最小，最小值为 $2\sqrt{3}$平方米.

19. 解：（1） $a_k=b_4=3^3=27$，即 $2k-1=27$， $k=14$， $A_{14}=196$. ....3 分

（2）依题意， $A_{2k}=4k^2$，且 $q^{m-1}=2k-1$，显然 $q>1$.

又 $B_{2m}=\frac{1-q^{2m}}{1-q}=\frac{1}{q-1}[(2k-1)^2q^2-1]$，

所以 $B_{2m}-A_{2k}=\frac{1}{q-1}[(2k-1)^2q^2-1]-4k^2$

$=\frac{1}{q-1}[(2k-1)^2q^2-4k^2q+(4k^2-1)]$， ....6 分

设 $f(x)=(2k-1)^2x^2-4k^2x+(4k^2-1)$， $f(1)=(2k-1)^2-1>0$

它是关于 x 的二次函数，它的图象的开口向上，

它的对称轴方程 $x=\frac{4k^2}{2(2k-1)^2}<1$，故 $f(x)$ 是 $(1,+\infty)$ 上的增函数，

所以当 $x>1$ 时 $f(x)>f(1)>0$，即 $B_{2m}-A_{2k}>0$，所以 $A_{2k}<B_{2m}$． ....9 分

（3）依题意： $a_k=b_m=a_1\cdot 2^{m-1}$，

由 $A_k=86B_m$ 得： $\frac{a_1+a_k}{2}\times k=86\times\frac{a_1-qa_m}{1-q}$ ，

即 $\frac{a_1+a_1\cdot 2^{m-1}}{2}\times k=86\times\frac{a_1-2^m a_1}{1-2}$ ，

$2^m=\frac{4\times 86+2k}{4\times 86-k}=\frac{12\times 86}{4\times 86-k}-2$， ....12 分

所以 $344-k=\frac{516}{2^{m-1}+1}$，

因为 $2^9=512$，故 $m-1\le 9$，且 $516=4\times 129=4\times 3\times 43$，且 $2^{m-1}+1$ 为奇数

则其中 $2^{m-1}+1=129$ 时， $\frac{516}{2^{m-1}+1}$ 是整数，

故 $m-1=7$， $m=8$ 且 $k=340$． ....16 分

20. **解**：解：（1）$\because f(x)$ 为奇函数，$\therefore b=d=0$， ··················2 分

又由 $f'(-\frac{\sqrt{3}}{3})=0$ 及 $f(-\frac{\sqrt{3}}{3})=-\frac{2\sqrt{3}}{9}$，得 $a=-1,c=1$，

$\therefore f(x)=-x^3+x$； ··················4 分

当 $x<-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时， $f'(x)<0$，当 $-\frac{\sqrt{3}}{3}<x<\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时 $f'(x)>0$，

$\therefore f(x)$ 在 $x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时取得极小值，$\therefore f(x)=-x^3+x$ 为所求 ··················5 分

（2）方程 $-\frac{1}{3}f'(x)-nx+4n+\frac{1}{3}=0$ 化简得： $x^2-nx+4n=0$，

因为方程仅有整数解，故 n 为整数，

又由 $x^2=n(x-4)$ 及 $n>0$ 知， $x-4>0$． ··················7 分

又 $n=\dfrac{x^2}{x-4}=(x-4)+\dfrac{16}{(x-4)}+8$，故 $x-4$ 为 16 的正约数，　　　　………………9 分

所以 $x-4=1,2,4,8,16$，进而得到 $n=16,18,25$.　　　　………………10 分

（3）因为 $g(x)=|x^3-3tx|,x\in[-1,1]$是偶函数，所以只要求出 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值即可. 记 $h(x)=x^3-3tx$，$\because h'(x)=3x^2-3t=3(x^2-t)$，

（1）$t\le 0$ 时，$h'(x)\ge 0$，$h(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调增且 $h(x)\ge h(0)=0$.

$\therefore g(x)=h(x)$，故 $F(t)=h(1)=1-3t$；　　　　………………12 分

（2）$t>0$ 时，由 $h'(x)=0$ 得，$x=\sqrt{t}$, 和 $x=-\sqrt{t}$，

①当 $\sqrt{t}\ge 1$ 即 $t\ge 1$ 时，$h(x)$ 在［0，1］上单调减，

$\therefore h(x)\le h(0)=0$，故 $g(x)=-h(x)$，

$F(t)=-h(1)=3t-1$；　　　　………………14 分

②当 $\sqrt{t}<1$ 即 $0<t<1$ 时，$h(x)$ 在 $(0,\sqrt{t})$ 单调减，$(\sqrt{t},1)$ 单调增，

（Ⅰ）当 $\sqrt{t}<1\le 2\sqrt{t}$，即 $\dfrac{1}{4}\le t<1$ 时，$|h(\sqrt{t})|>|h(1)|$，$\therefore F(t)=-h(\sqrt{t})=2t\sqrt{t}$，

（Ⅱ）当 $2\sqrt{t}<1$，即 $0<t<\dfrac{1}{4}$ 时，$h(1)>2t\sqrt{t}$，$\therefore F(t)=h(1)=1-3t$，

综上可知，$F(t)=\begin{cases}1-3t, t<\dfrac{1}{4}\\ 2t\sqrt{t}, \dfrac{1}{4}\le t<1.\\ 3t-1, t\ge 1\end{cases}$　　　　………………16 分