成语与寓言中的概率思维

欧阳顺湘

（哈尔滨工业大学（深圳）　518055）

英国经济学家、政治社会学家白哲特（Walter Bagehot，1826－1877）曾说“生活是概率的大学校”．法国数学家拉普拉斯在其《分析概率论》有句常被引用的名言：“生活中最重要的问题，绝大部分其实只是概率问题．”Leo Breiman 在其概率论著作[1]的序言写道：“概率论有两手，右手是严格地使用测度论的基础工作，左手是‘概率地思考’，将问题变成赌博，投骰子，粒子运动问题．”另一方面，不少成语、寓言是生活智慧的结晶．所以，很自然地，一些成语和寓言蕴含着概率思维．我们可以通过成语与寓言来直观地了解一些概率思想，也可以用概率思维来更好地理解一些成语与故事．我们下面就按概率论中讨论的一些内容分类介绍相关成语．

1　随机现象与随机事件

“天有不测风云”反映了人们对随机现象无处不在的认识．“守株待兔”故事中的农夫错在将随机现象将当成确定性现象，或说错在高估了兔子撞树桩这个随机事件发生的概率．“水中捞月”则是将不可能事件当作了可能事件．还有些成语说明随机事件发生可能性大小，如“稳操胜券”“十拿九稳”“百发百中”等．

“万事皆有因”“有果必有因”则反映了人们对包括随机现象在内的各种现象产生的原因的探究．如一些人曾认为人的命运由生辰八字决定，认为一些结果是“命中注定”．在婚配等问题上要研究是否“八字不合”．实际上，人的生辰充满随机性，所有八字组合也只有有限种可能结果，远远不能决定丰富多彩的人生．

很多人认为随机现象源于无知：古希腊哲学家德谟克利特认为“一切都遵照必然而产生”，牛顿、拉普拉斯等提倡决定论，爱因斯坦也认为“上帝不掷骰子”．现在，一般认为量子力学中出现的随机现象是真正的随机．

随机现象的出现并不是坏事．例如，许多人设定密码时常利用手机号、生日、或门牌号等．密码破译者可能会利用这个偏好来猜测密码．如果是随机生成的密码，就很难猜测了．又如，在剪刀－石头－布游戏中，有的高手能计算出对方出招的模式，预测出对方的下一手．为与高手对抗，可以考虑随机策略，即随机出剪刀、石头或布，这样可以达到纳什均衡．类似地，生物学中基因突变与重组的随机性使得生物呈现出多样性，从而保证了各种子代的产生以适应自然选择．这三者的策略可谓“随机应变”——如果允许我们将它“曲解”为用“随机”的办法来对抗．“狡兔三窟”，也同样是利用了随机性来提高安全性，其做法异曲同工．

2　小概率事件

设某随机事件 A 发生的概率为 $p>0$，则它不发生的概率为 $1-p$，在 n 次独立重复试验中，A 不发生的概率为 $(1-p)^n$．当 n 趋于无穷时，A 发生的概率 $1-(1-p)^n$ 趋于 1．

由此可知，一个随机事件单次发生的概率虽然可能很小，但在充分多次独立重复试验中，它至少发生一次的概率将很大．这就导致所谓的墨菲定律：一件事情发生的概率无论有多小，只要有可能发生，就几乎一定会发生．它可以解释很多现象：为什么自然界中会出现一些巧夺天工的奇迹？为什么参加高考如此重要的事情，总有新闻报道说有学生临到考场才发现忘带准考证．

不少成语体现了小概率事件的作用（[2]对部分此类成语做了一些讨论）．如有的成语总结人多力量大：“三人行，必有我师焉”“三个臭皮匠，顶个诸葛亮”“一根筷子容易折，一把筷子难折断”；有的成语劝人坚持不懈：“水滴石穿”“锲而不舍，

金石可镂”“只要功夫深,铁杵磨成针”.有的成语对人发出警戒,劝人谨慎:“常在河边走,哪有不湿鞋”“不怕一万,就怕万一”“勿以善小而不为,勿以恶小而为之”“千里之堤,溃于蚁穴”.

法国数学家波莱尔在1909年出版的一本谈概率的书籍中介绍了“打字的猴子”,设想猴子随机敲击键盘.于是就有了所谓的无限猴子定理:设有无限只猴子,且允许使用无限的时间,则一定会有一只猴子打出所要求的书籍或文章.如打出大英图书馆的全部著作,或莎士比亚的著作等等.但这里需要允许使用任意长的时间.农夫“守株待兔”并非不可能事件,只要等待足够长时间,也可以期望再次不劳而获.但农夫不事劳作,仅仅期待这个小概率事件多次发生以供生活所需,需要极大的耐心和时间成本,得不偿失.

3 大数定律

大数定律说一事件在多次独立重复试验中发生的频率稳定于该事件发生的概率.例如,投掷一枚均匀的硬币多次,其中正面朝上的次数大约为一半.这与成语“万变不离其宗”有类似处.

在生活中,人们常会咨询多位朋友或专家的意见再做决策,其目的就是通过听取各种意见,综合考虑,尽力消除随机因素的影响.这就是“集思广益”有作用的原理.其思想与大数定律一样.

成语“久赌必输”也包含有大数定律的思想.从长时间来看,赌场设计的规则一定是利己的.赌徒在有限的几次赌博中,可能有输有赢,但从长远来看,一定会输.例如,常见赌法双骰子(craps)游戏就这这样.该游戏规则如下:投掷两枚均匀的骰子,如果和是2,3或12,玩家输;如果和是7或11,玩家赢.如果是别的数(4,5,6,8,9,10),则以该数为设定点数,继续投掷两枚骰子:如果和为设定的点数,则玩家赢;如果和为7,则玩家输;否则继续按当前规则继续投掷.在这个游戏中,玩家赢的概率为$\frac{244}{495}\approx 0.49293$,仅比0.5稍小,这样使得玩家难以察觉输赢的差别以吸引人来玩,又使得在长期运营中,赌场有利可图.

伊索寓言“龟兔赛跑”讲兔子因为在比赛中睡大觉而输的故事.常见解读是兔子不够稳重不值得学习,乌龟勤恳堪称模范.罗森塔尔认为这是对随机性的漠视[3].他建议用概率视角准确理解这个故事.按照大数定律,赛跑的关键不在于谁更可靠、谁更稳重,而在于谁的平均速度更快.长远来看,谁平均跑得快,谁在比赛中就一定能赢.

4 Poisson 聚集

生活中不乏见到“屋漏偏遭连夜雨”这样接二连三倒霉的事情,也可能遇到“双喜临门”这样好运不断的好事.如某地突然连续出现多起刑事案件,又如近期与一个平常难得一见的朋友多次偶遇.这样的巧合为什么并不乏见?随机地发生的事情,为什么会“碰巧”聚集在一起?“无巧不成书”的背后其实也有概率解释.数学上,人们称之为Poisson聚集(Poisson Clumping).下面的例子可以说明这种现象.

将2500个点随机投往被等分为50×50个小正方形的正方形区域.每个小正方形区域平均有1个落点.记某小正方形区域内的落点数为X,则$X\sim B(2500,0.0004)$,即X服从参数为$n=2500$,$p=0.0004$的二项分布,对任意$k=0,1,2,\cdots,n$,

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}.$$

我们可以用参数$\lambda=np=1$为Poisson分布近似这个二项分布,即对任意$k=0,1,2,\cdots,n$,

$$P(X=k)\approx\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

由此可得在一个小正方形区域中有不少于5个落点的概率约为0.004.因此,平均而言,每250个小正方形区域中就有1个小区域中的落点数不少于5.在上述随机落点中,平均有10个小区域中的落点数不少于5.所以,在一些小区域中有点的聚集并不是意外.

在第二次世界大战中,伦敦受到德军飞弹的打击,一些地区似乎更常被打击.英国统计学家R.D. Clark用类似于上述例子中的方法,推断出德军的袭击是随机的.

5 贝叶斯定理

贝叶斯学派认为概率是人们对某件事情发生可能性大小的主观判断,随着所知信息的改变而改变,即所有的概率都是条件概率.信息可以消除不确定性.

《韩非子》中的寓言故事“智子疑邻”以及《列子》中的寓言故事“疑邻盗斧”说的是人们的主观

判断受到一些因素的影响. 对这两个故事的常见解释是"应该实事求是,尊重客观事实,不要主观臆断". 事实上,虽然无根据的"臆断"要尽量避免,但主观判断无处不在. 概率的频率解释要求试验可多次重复,但有很多事件是难以重复的,如某地发生地震,其发生的概率就没法用频率解释,只能用主观判断.

贝叶斯提出的贝叶斯定理可以帮助人们推理. 下面是贝叶斯定理的简单版本.

设事件 A 或 A^c 导致事件 B 发生,且 A,A^c 发生的概率 $P(A)$,$P(A^c)$ 已知,不为零,在 A 或 A^c 发生的条件下 B 发生的概率 $P(B|A)$,$P(B|A^c)$ 也已知. 如果事件 B 发生了,概率不为零,我们可以用贝叶斯公式确定 A 发生的概率

$$P(A|B)=\frac{P(B|A)P(A)}{P(B)},$$

其中 B 发生的概率可以全概率公式计算如下

$$\begin{aligned}P(B)&=P(B\cap A)+P(B\cap A^c)\\&=P(B|A)P(A)+P(B|A^c)P(A^c).\end{aligned}$$

我们称 $P(A)$ 为 A 的先验概率,在 B 发生后,A 发生的概率更新为 $P(A|B)$,称之为 A 的后验概率. 如果还有别的信息,我们可以将 $P(A|B)$ 当作 A 发生的先验概率,重复上述过程再次更新我们对 A 发生的概率的认识.

《战国策》中记载有寓言故事"三人成虎":

庞葱与太子质于邯郸,谓魏王曰:"今一人言市有虎,王信之乎?"王曰:"否."
"二人言市有虎,王信之乎?"王曰:"寡人疑之矣."
"三人言市有虎,王信之乎?"王曰:"寡人信之矣."庞葱曰:"夫市之无虎明矣,然而三人言而成虎. 今邯郸去大梁也远于市,而议臣者过于三人,愿王察之."王曰:"寡人自为知."于是辞行,而谗言先至. 后太子罢质,果不得见.

这个故事生动地刻画了魏王不断修正自己对"市有虎"这件事发生的概率的大小的过程. 我们用贝叶斯定理量化说明这个过程如下:

用 T 表示"市有虎"这件事. 一般而言,闹市难得有虎,可假设有虎的先验概率较小,为 0.03,即

$$P(T)=0.03,\quad P(T^c)=0.97.$$

用 R_1,R_2,R_3 分别表示第一、二、三人向魏王报告市有虎. 设三人的行为独立且相同,在市有虎的条件下,报告有虎的概率为 0.7,没虎却有意生谣或看错了(如把玩具虎当作真虎)的概率为 0.1,即对 $i=1,2,3$,有

$$P(R_i|T)=0.7,\quad P(R_i|T^c)=0.1.$$

由贝叶斯公式,一人言市有虎的条件下,魏王相信市有虎的概率被修正为:

$$\begin{aligned}P(T|R_1)&=\frac{P(R_1|T)P(T)}{P(R_1|T)P(T)+P(R_1|T^c)P(T^c)}\\&=\frac{0.7\times0.03}{0.7\times0.03+0.1\times0.97}\approx0.178.\end{aligned}$$

这个概率比先验概率稍微有所增加;但不足以使魏王相信,所以魏王说"否". 现在第二人言市有虎,我们把有虎的后验概率 $P(T|R_1)\approx0.178$ 当作 T 的先验概率,重复前面的计算,可得后验概率

$$P(T|R_2)\approx\frac{0.7\times0.178}{0.7\times0.178+0.1\times0.822}\approx0.602.$$

这个概率也不大不小,所以魏王"疑之". 再次重复,可得在第三人言市有虎的条件下,魏王认为市有虎的后验概率为

$$P(T|R_3)\approx0.914.$$

至此,魏王"信之矣".

《战国策》中记载"曾参杀人"与"三人成虎"类似. 伊索寓言"狼来了",也是一个不断修订概率的过程. 但"狼来了"与"三人成虎""曾参杀人"有所区别①. 一是三人依次欺骗同一人(魏王、曾母);一是同一人(放羊娃)三次欺骗同一批农夫.

从"三人成虎"等故事可见"众口铄金"的危害,需要警惕谣言. 奉行"事不过三"准则的人也要警惕,明辨是非. 在现代信息交流便利的情况下,网络谣言盛行,其原因可以用贝叶斯推理解释,但我们也可以用贝叶斯推理来帮助我们甄别谣言. 其应用原理与上述三人成虎的概率推理类似. 垃圾邮件过滤,语音识别,拼写检测,搜索引擎和输入法智能纠误等都与此类似.

6　结语

我们从概率视角解释了"水滴石穿""集思广

① 《贝叶斯版的"三人成虎"》(王志祥,宋涛,数学文化,8(4):111−112,2017;或同作者所著《数学杂谈》,天津大学出版社,2017)一文用贝叶斯公式讨论了三人成虎. 我们认为该文的逻辑适合于分析"狼来了",不适合于分析"三人成虎". 请读者留意.

(下转第 33 页)

师在教学时引导学生精选变量和关系,保留问题的"主干",削减问题的"枝杈",简化描述,提出合理的假设,建立相应的数学模型,并用恰当的数学符号表示,最终用数学知识解决问题,以培养学生数学建模能力的联系水平.比如在"方舱"建模活动中,先由学生独立阅读获取信息,再自主完成信息的分析、筛选、简化、假设,将实际问题进一步数学化,用数学语言正确表达模型的结构特征以及相互关系,获得数学模型并解决问题.

4.3 任务驱动,联系现实世界,在综合实践类活动中培养反思水平

"综合与实践"是指学生运用学习掌握的数学知识、思想和方法解决现实问题,可以理解为数学探究和数学建模活动.其主要内容为:结合实际情境,经历设计解决具体问题的方案,并加以实施的过程,体验建立模型、解决问题的过程[9]41.综合实践活动在培养学生问题意识、应用意识、创新意识等方面具有得天独厚的优势,是培养学生数学建模能力的有效途径.在初中数学教学中,受考试指挥棒和知识本位等因素影响,广大一线教师特别注重数与代数、图形与几何、统计与概率三个部分的教学,往往忽视或直接放弃课程内容中综合与实践部分的教学.事实上,综合与实践课程内容的主要功能是在数学与外部世界之间搭建桥梁,是学生主动运用数学知识以及其他学科知识解决实际问题的重要途径,也是培养学生数学建模能力的有效路径.因此,教师应充分挖掘教材上综合与实践课程内容的教学价值,注重发掘现实生活中的问题,每个月或每学期组织开展一次综合实践活动,驱动学生用数学的眼光观察现实世界,发现和提出有价值的问题,自主探究、合作交流,动脑、动手、动口,经历建立数学模型解决问题的活动过程,使学生感悟数学来源于实践,又应用于实践[10].比如将上述"节水"问题进一步还原为更"原始"的形态,将一些数据信息剔除,呈现为现实原型问题:"我们常常听到长辈告诉我们,洗澡时尽量用淋浴的方式,淋浴会比浴缸泡澡更节水.事实是如此吗?"对学生而言,这样的实际问题就是一种主题综合实践活动,解决这个问题需要学生完成数据收集、模型假设等工作,将实际问题转化为数学问题,抽象出数学模型进行探索,使学生完整经历引模、建模、解模、验模的活动过程,从而有效培养学生数学建模能力的反思水平.

参考文献

[1]教育部基础教育课程教材专家工作委员会.义务教育数学课程标准(2011年版)解读[M].北京:北京师范大学出版社,2012:106
[2]NISS M. Models and modelling in mathematics education[J]. Europen Mathematical Society Newsletter,2012(86):49-52
[3]徐利治.数学方法论选讲[M].武汉:华中理工大学出版社,2000:24—26
[4]徐稼红.中学数学应用于建模[M].苏州:苏州大学出版社,2001:1-2
[5]徐斌艳等著.数学核心能力研究[M].上海:华东师范大学出版社,2019:275
[6]陈欣玥.七年级数学建模教学研究[D].苏州大学,2018:13
[7]朱娅梅.义务教育阶段学生数学建模能力评价框架和行为测评指标[J].数学教育学报,2018(3):93—96
[8]林福来.台湾2011数学素养评量样本试题[EB/OL].(2011-12-23)[2017-10-30].http://PISA.nuth.edu.tw/sample_tw.htm
[9]中华人民共和国教育部.义务教育数学课程标准(2011年版)[M].北京:北京师范大学出版社,2012:7,41
[10]义务教育学科核心素养与关键能力研究项目组.义务教育学科核心素养关键能力测评与教学[M].南京:江苏凤凰科学技术出版社,2018:105

(上接第3页)

益""无巧不成书"等成语以及"狡兔三窟""龟兔赛跑""疑邻盗斧""三人成虎"等寓言故事.这样做,一方面可以使人们对一些成语与寓言故事有新的认识,了解到其中所蕴含的概率智慧.另一方面,通过人们熟知的成语和寓言故事来阐述概率思维可以激发学习者的学习兴趣,加深学习者对概率的理解.

参考文献

[1]Leo Breiman. Probability Theory[M]. SIAM: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992
[2]王琼.谚语中的概率论[J].西藏大学学报(自然科学版),24(2):106-108, 2009
[3]罗森塔尔(J. S. Rosenthal).雷劈的真相:神奇的概率事件[M].吴闻,译.上海:上海科技教育出版社,2012