江苏省仪征中学2019-2020学年第一学期
高三数学周三练习（10） 2019.11.20

范围：集合与逻辑、函数与导数、三角函数、平面向量、直线与圆 、圆锥曲线、不等式

一、填空题：本大题共14小题，每小题5分，计70分. 不需写出解答过程，请把答案写在答题纸的指定位置上.

1．已知全集$U=\mathbf{R}$，函数$y=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$的定义域为集合A，函数$y=\log_2(x+2)$的定义域为集合B，则集合$(\complement_U A)\cap B=$____▲____.

2．函数$f(x)=x^{\frac{1}{2}}$的定义域为____▲____.

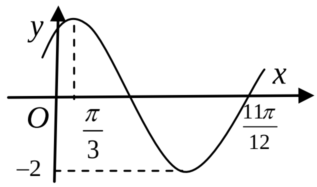
3．函数$f(x)=2^x$的值域为____▲____.

4．$\lg 2+\lg 5=$____▲____.

5．已知向量$\vec{a}=(2,1),\vec{b}=(0,-1)$，若$(\vec{a}+\lambda\vec{b})\perp\vec{a}$，则实数λ=____▲____.

6．已知命题p：$\exists x\in\mathbf{R}$，使$\sin x=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$；命题q：$\forall x\in\mathbf{R}$，都有$x^2+x+1>0$．给出下列命题：（1）命题“$p\wedge q$”是真命题;（2）命题“$p\wedge\neg q$”是假命题;（3）命题“$\neg p\vee q$”是真命题;（4）命题“$\neg p\vee\neg q$”是假命题．其中正确的是____▲____.（填序号）.

7．函数$f(x)=A\sin(\omega x-\varphi)(A>0,\omega>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2})$的图象如图所示，则$f(-\dfrac{\pi}{3})=$____▲____.



8．在△ABC中，角A，B，C所对边的长分别为a，b，c．已知$a+\sqrt{2}c=2b$，$\sin B=\sqrt{2}\sin C$，则$\cos A=$____▲____.

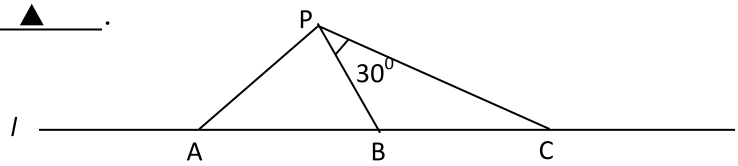
9． 已知$\cos(75^\circ+\alpha)=\dfrac{1}{3}$，则$\cos(30^\circ-2\alpha)$的值为____▲____.

10．已知函数$f(x)=\begin{cases}\log_2(x+1), x>0\\ -x^2+2x, x\le 0\end{cases}$，若$|f(x)|\ge ax$，则$a$的取值范围是____▲____.

11. 已知双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的左顶点为$M$，右焦点为$F$，过$F$作垂直于$x$轴的直线$l$与双曲线交于$A$，$B$两点，且满足$MA\perp MB$，则该双曲线的离心率是___▲___.

12. 若$f(x)=\begin{cases}\dfrac{a}{x}, & x\geqslant 1,\\ -x+3a, & x<1\end{cases}$是 **R** 上的单调函数，则实数$a$的取值范围为___▲___.

13．如图，A,B,C是直线上三点，P是直线外一点，$AB=BC=1$，$\angle APB=90^\circ$，$\angle BPC=30^\circ$，则$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=$___▲___.



14．已知函数$f(x)=\begin{cases}1+\ln x, & x\geq 1\\ \dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}, & x<1\end{cases}$，若$x_1\neq x_2$，且$f(x_1)+f(x_2)=2$，则$x_1+x_2$的取值范围是___▲___.

二、解答题：本大题共 6 小题，计 90 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤，请把答案写在答题纸的指定区域内.

15.（本题满分 14 分）

设已知$\vec{a}=(2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}, \sin\dfrac{\alpha-\beta}{2})$，$\vec{b}=(\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}, 3\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2})$，其中$\alpha$、$\beta\in(0,\pi)$.

(1) 若$\alpha+\beta=\dfrac{2\pi}{3}$，且$\vec{a}=2\vec{b}$，求$\alpha$、$\beta$的值；

(2) 若$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{5}{2}$，求$\tan\alpha\tan\beta$的值.

16.（本题满分 14 分）不等式组$\begin{cases}y\leq x\\ y\geq 0\\ x\leq 4\end{cases}$表示的平面区域为 A.

(1) 画出平面区域 A，并求面积；

(2) 点(x,y)在平面区域内，求$z=2x+y$的取值范围；

(3) 一次函数$y=\dfrac{1}{2}x+b$的图像平分区域 A 的面积，求b.

17.（本题满分 14 分）

已知等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=-19, 5a_5=11a_8$.

(1)求数列$\{a_n\}$的前n项和S_n的最小值；

(2)求数列$\{|a_n|\}$的前n项和T_n.

18.（本题满分 16 分）

给定椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，称圆 C_1：$x^2+y^2=a^2+b^2$为椭圆 C的“伴随圆”．已知椭圆 C的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，且经过点(0，1)．

(1)求实数 a，b的值；

(2)若过点 $P(0，m)(m>0)$的直线 l与椭圆 C有且只有一个公共点，且 l被椭圆 C的伴随圆 C_1所截得的弦长为 $2\sqrt{2}$，求实数 m的值.

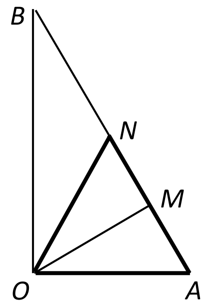
19.（本题满分 16 分）

如图所示，某镇有一块空地ΔOAB，其中$OA=3km$，$OB=3\sqrt{3}km$，$\angle AOB=90^\circ$．当地镇政府规划将这块空地改造成一个旅游景点，拟在中间挖一个人工湖ΔOMN，其中M,N都在边A,B上，且$\angle MON=30^\circ$，挖出的泥土堆放在ΔOAM地带上形成假山，剩下的ΔOBN地带开设儿童游乐场．为安全起见，需在ΔOAN的一周安装防护网.

（1）当$AM=\dfrac{3}{2}km$时，求防护网的总长度；

（2）若要求挖人工湖用地ΔOMN的面积是堆假山用地ΔOAM的面积的$\sqrt{3}$倍，试确定$\angle AOM$的大小；

（3）为节省投入资金，人工湖ΔOMN的面积要尽可能小，问如何设计施工方案，可使ΔOMN 的面积最小？最小面积是多少？



20.（本题满分 16 分）

已知函数$f(x)=(ax^2+x+2)e^x$（$a>0$），其中e是自然对数的底数.

（1）当$a=2$时，求$f(x)$的极值；

（2）若$f(x)$在$[-2,2]$上是单调增函数，求a的取值范围；

（3）当$a=1$时，求整数t的所有值，使方程$f(x)=x+4$在$[t，t+1]$上有解.

周三练 10 参考答案

一、填空题.

1． $(-2，-1]$； 2. $[0,+\infty)$ 3． $(0,+\infty)$ 4． 1 5． 5； 6．（2）（3）；

7． $-\dfrac{1}{2}$； 8． $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$； 9． $\dfrac{7}{9}$； 10. $[-2,0]$； 11． 2；

12. $[\dfrac{1}{2}，+\infty)$ ； 13． $-\dfrac{4}{7}$ ； 14. $[3-2\ln 2,+\infty)$.

二、解答题

15. 解：(1) $\because \vec{a}=2\vec{b}$，$\therefore \begin{cases} 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2} \\ \sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}=6\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2} \end{cases}$，-----------------2 分

$\therefore \sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}=0$，$\therefore \dfrac{\alpha-\beta}{2}=k\pi$，-----------------------4 分

而 α、$\beta\in(0,\pi)$，$\therefore \dfrac{\alpha-\beta}{2}\in(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$，$\therefore \dfrac{\alpha-\beta}{2}=0$，即 $\alpha=\beta$，------6 分

又 $\alpha+\beta=\dfrac{2\pi}{3}$，所以，$\alpha=\beta=\dfrac{\pi}{3}$---------------------------7 分

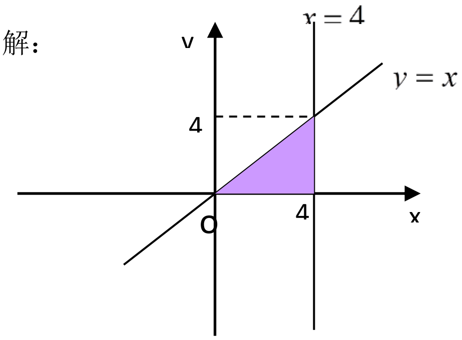
（2）$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cos^2\dfrac{\alpha+\beta}{2}+3\sin^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}=2\times\dfrac{1+\cos(\alpha+\beta)}{2}+3\times\dfrac{1-\cos(\alpha-\beta)}{2}$

$=\dfrac{5}{2}+\cos(\alpha+\beta)-\dfrac{3\cos(\alpha-\beta)}{2}=\dfrac{5}{2}$-----------------------10 分

$\therefore$ $2\cos(\alpha+\beta)-3\cos(\alpha-\beta)=0$ ， 即 $-\cos\alpha\cos\beta-5\sin\alpha\sin\beta=0$ $\therefore$

$\tan\alpha\tan\beta=-\dfrac{1}{5}$------14 分

16. 解：



--------------------------2 分

由图像可得：$S=\dfrac{1}{2}\times4\times4=8$---------------------------4 分

（Ⅱ）将目标函数变形为 $y=-2x+z$，平移直线 $y=-2x+z$，当它经过 $(4,4)$ 时截距 z 最大为 12；当它经过 $(0,0)$ 时截距 z 最小为 0. 所以 z 的取值范围是 $[0,12]$------8 分

(III) $y=\dfrac{1}{2}x+b$ 的图像经过区域 A 时，$b\in[-2,2]$，-------------------9

当 $b\in[-2,0]$ 时，$S=\dfrac{1}{2}(b+2)(4+2b)=4$，$\therefore b+2=2,b=0$-------11 分

当 $b\in(0,2]$ 时，$S=\dfrac{1}{2}(4-2b)(4-2-b)=4$，$\therefore -b+2=2,b=0$（舍）----13 分

$\therefore b=0$---14 分

17. 解：（Ⅰ）$a_1=-19$，$5a_5=11a_8$，$5(a_1+4d)=11(a_1+7d)$，$5a_1+20d=11a_1+77d$，

$\therefore 6a_1=-57d$，即 $6\times(-19)=-57\times d$，$\therefore d=2$ $\therefore a_n=-19+(n-1)\times 2=2n-21$

当 $a_n<0$ 时，$2n<21$，$n<\dfrac{21}{2}$，即当 $n\leqslant 10$ 时，$a_n<0$，当 $n>11$ 时，$a_n>0$ $\therefore S_n$ 最小值为 S_{10}---------6 分 $S_{10}=10\times(-19)+\dfrac{10\times 9}{2}\times 2=-100$-------------------------------7 分

（Ⅱ）$\because a_{10}<0$，$a_{11}>0$ 当 $n\leqslant 10$ 时，$T_n=-a_1-a_2\cdots\cdots-a_n=-S_n=-n^2+20n$-------------------10 分。当 $n\geqslant 11$ 时，$T_n=-a_1-a_2\cdots\cdots-a_{10}+a_{11}+a_{12}+\cdots\cdots+a_n=S_n-2S_{10}=n^2-20n+200$----13 分

$$\therefore T_n=\begin{cases}-n^2+20n & n\leqslant 10\\ n^2-20n+200 & n\geqslant 11\end{cases}$$ ----------------------------14 分

18. **解：**（1）记椭圆 C 的半焦距为 c．由题意，得 $b=1$，$\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$c^2=a^2+b^2$，

解得 $a=2$，$b=1$．

（2）由（1）知，椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，圆 C_1 的方程为 $x^2+y^2=5$．显然直线 l 的斜率存在．设直线 l 的方程为 $y=kx+m$，即 $kx-y+m=0$． 因为直线 l 与椭圆 C 有且只有一个公共点，故方程组 $\begin{cases}y=kx+m,\\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$ （*） 有且只有一组解．

由（*）得 $(1+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-4=0$．从而 $\triangle=(8km)^2-4(1+4k^2)(4m^2-4)=0$．

化简，得 $m^2=1+4k^2$．① 因为直线 l 被圆 $x^2+y^2=5$ 所截得的弦长为 $2\sqrt{2}$，

所以圆心到直线 l 的距离 $d=\sqrt{5-2}=\sqrt{3}$．即 $\dfrac{|m|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{3}$． ②

由①②，解得 $k^2=2$，$m^2=9$． 因为 $m>0$，所以 $m=3$．

19．解：(1) 在 ΔOAB 中，因为 $OA=3$，$OB=3\sqrt{3}$，$\angle AOB=90^\circ$，所以 $\angle OAB=60^\circ$，

在 ΔAOM 中，$OA=3, AM=\dfrac{3}{2}, \angle OAM=60^\circ$，

由余弦定理，得 $OM=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，

所以 $OM^2+AM^2=OA^2$，即 $OM\perp AN$，所以 $\angle AOM=30^\circ$，

所以 ΔOAN 为正三角形，所以 ΔOAN 的周长为 9，即防护网的总长度为 9 km.

(2) 设 $\angle AOM=\theta(0^\circ<\theta<60^\circ)$，因为 $S_{\Delta OMN}=\sqrt{3}S_{\Delta OAM}$，

所以 $\dfrac{1}{2}ON\cdot OM\sin 30^\circ=\sqrt{3}\times\dfrac{1}{2}OA\cdot OM\sin\theta$，即 $ON=6\sqrt{3}\sin\theta$，

在 ΔOAN 中，由 $\dfrac{ON}{\sin 60^\circ}=\dfrac{OA}{\sin(\theta+60^\circ+30^\circ)}=\dfrac{3}{\cos\theta}$，得 $ON=\dfrac{3\sqrt{3}}{2\cos\theta}$，

从而 $6\sqrt{3}\sin\theta=\dfrac{3\sqrt{3}}{2\cos\theta}$，即 $\sin 2\theta=\dfrac{1}{2}$，由 $0^\circ<2\theta<120^\circ$，

得 $2\theta=30^\circ$，所以 $\theta=15^\circ$，即 $\angle AOM=15^\circ$.

(3) 设 $\angle AOM=\theta(0^\circ<\theta<60^\circ)$，由（2）知 $ON=\dfrac{3\sqrt{3}}{2\cos\theta}$，

又在 $\angle AOM$ 中，由 $\dfrac{OM}{\sin 60^\circ}=\dfrac{OA}{\sin(\theta+60^\circ)}$，得 $OM=\dfrac{3\sqrt{3}}{2\sin(\theta+60^\circ)}$，

所以 $S_{\Delta OMN}=\dfrac{1}{2}OM\cdot ON\cdot\sin 30^\circ=\dfrac{27}{16\sin(\theta+60^\circ)\cos\theta}$

$$=\frac{27}{8(\frac{1}{2}\sin 2\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\theta+\frac{\sqrt{3}}{2})}$$

$$=\frac{27}{8\sin(2\theta+60^\circ)+4\sqrt{3}},$$

所以当且仅当 $2\theta+60^\circ=90^\circ$，即 $\theta=15^\circ$ 时，ΔOMN 的面积取最小值为 $\dfrac{27(2-\sqrt{3})}{4}$ km^2.

20．解：(1) $\because f(x)=(2x^2+x+2)e^x, \therefore f'(x)=(2x^2+5x+3)e^x=(x+1)(2x+3)e^x$

$f'(x)=0, x=-1,-\dfrac{3}{2}$

$f(x)_{极大值}=f(-\dfrac{3}{2})=5e^{-\frac{3}{2}}$

$f(x)_{极小值}=f(-1)=3e^{-1}$

x	$(-\infty,-\frac{3}{2})$	$-\frac{3}{2}$	$(-\frac{3}{2},-1)$	-1	$(-1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	增	极大值	减	极小值	增

（2）问题转化为 $f'(x)=[ax^2+(2a+1)x+3)e^x \geq 0在x\in[-2,2]$ 上恒成立，

$\because e^x>0,\therefore ax^2+(2a+1)x+3)\geq 0在x\in[-2,2]$ 上恒成立，

令 $\varphi(x)=ax^2+(2a+1)x+3),\because a>0,对称轴x=-1-\dfrac{1}{2a}<0$

①当 $-1-\dfrac{1}{2a}\leq -2$ ，即 $0<a\leq\dfrac{1}{2}$ 时， $g(x)$ 在 $[-2,2]$ 上单调增，

$\therefore g(x)_{\min}=g(-2)=1>0 \qquad \therefore 0<a\leq\dfrac{1}{2}$

②当 $-2<-1-\dfrac{1}{2a}<0$ ，即 $a>\dfrac{1}{2}$ 时，$g(x)$ 在 $[-2,-1-\dfrac{1}{2a}]$ 上单调减，在 $[-1-\dfrac{1}{2a},2]$ 上单调增，

$\therefore \Delta=(2a+1)^2-12a\leq 0$ 解得：$1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\leq a\leq 1+\dfrac{\sqrt{3}}{2} \qquad \therefore \dfrac{1}{2}<a\leq 1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

综上，a 的取值范围是 $(0,1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}]$.

（3）$\because a=1,$ 设 $h(x)=(x^2+x+2)e^x-x-4$ ， $h'(x)=(x^2+3x+3)e^x-1$

令 $\varphi(x)=(x^2+3x+3)e^x-1$ ， $\varphi'(x)=(x^2+5x+6)e^x$

令 $\varphi'(x)=(x^2+5x+6)e^x=0,得x=-2,-3$

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,-2)$	-2	$(-2,+\infty)$
$\varphi'(x)$	+	0	−	0	+
$\varphi(x)$	增	极大值	减	极小值	增

$\therefore \varphi(x)_{极大值}=\varphi(-3)=\dfrac{3}{e^3}-1<0$ ， $\varphi(x)_{极小值}=\varphi(-2)=\dfrac{1}{e^2}-1<0$

$\because \varphi(-1)=\dfrac{1}{e}-1<0,\varphi(0)=2>0$ ，$\therefore$存在 $x_0\in(-1,0)$ ， $x\in(-\infty,x_0)$ 时， $\varphi(x)<0$ ，

$x\in(x_0,+\infty)$ 时， $\varphi(x)>0$. $\quad \therefore h(x)$ 在 $(-\infty,x_0)$ 上单调减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调增

又 $\because h(-4)=\dfrac{14}{e^4}>0,h(-3)=\dfrac{8}{e^3}-1<0,h(0)=-2<0,h(1)=4e-5>0$

由零点的存在性定理可知： $h(x)=0$ 的根 $x_1\in(-4,-3),x_2\in(0,1)$ ，即 $t=-4,0$.