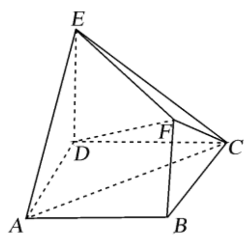
2020届高三数学周末限时练习附加题7　　2019/10/27

21. 已知曲线 C：$y^2=\frac{1}{2}x$，在矩阵 $M=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}$对应的变换作用下得到曲线 C_1，C_1在矩阵 $N=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$对应的变换作用下得到曲线 C_2，求曲线 C_2的方程.

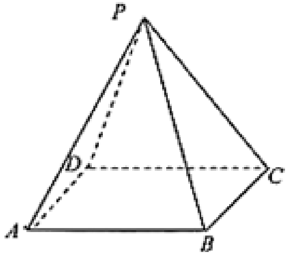
22. 如图，在多面体 $ABCDEF$ 中，$ABCD$ 为正方形，$ED\perp$平面 $ABCD$，$FB// ED$，且 $AD=DE=2BF=2$.



(1)求证：$AC\perp EF$;

(2)求二面角 $C-EF-D$ 的大小.

23. 已知正四棱锥 $P-ABCD$ 的底面边长和高都为 2.现从该棱锥的 5 个顶点中随机选取 3 个点构成三角形，设随机变量 X 表示所得三角形的面积.



（1）求概率 $P(X=2)$ 的值；

（2）求随机变量 X 的概率分布及其数学期望 $E(X)$.

24. 记 $f(n)=(3n+2)(C_2^2+C_3^2+C_4^2+\cdots+C_n^2)(n\geq 2,n\in N^*)$.

（1）求 $f(2),f(3),f(4)$ 的值；

（2）当 $n\geq 2,n\in N^*$ 时，试猜想所有 $f(n)$ 的最大公约数，并证明.

2020 届高三数学周末限时练习附加题 7 答案　　2019/10/27

21. 解　设 $A=NM$，则 $A=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-2\\1&0\end{bmatrix}$，设 $P(x'，y')$ 是曲线 C 上任一点，在两次变换下，在曲线 C_2 上对应的点为 $P(x，y)$，则 $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-2\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2y'\\x'\end{bmatrix}$，即 $\begin{cases}x=-2y'，\\y=x'，\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}x'=y,\\y'=-\frac{1}{2}x.\end{cases}$ 又点 $P(x'，y')$ 在曲线 C：$y^2=\frac{1}{2}x$ 上，$\therefore\left(-\frac{1}{2}x\right)^2=\frac{1}{2}y$，即 $x^2=2y$.

22. (1) 证明　连接 BD，$\because FB/\!/ED$，$\therefore F，B，E，D$ 共面，

$\because ED\perp$ 平面 $ABCD$，$AC\subset$ 平面 $ABCD$，$\therefore ED\perp AC$，又 $ABCD$ 为正方形，

$\therefore BD\perp AC$，而 $ED\cap DB=D$，$ED，DB\subset$ 平面 $DBFE$，$\therefore AC\perp$ 平面 $DBFE$，而 $EF\subset$ 平面 $DBFE$，$\therefore AC\perp EF$.

(2) 解　如图建立空间直角坐标系.

则 $A(2，0，0)$，$B(2，2，0)$，$C(0，2，0)$，$F(2，2，1)$，$E(0，0，2)$，

由 (1) 知 $\overrightarrow{AC}$ 为平面 $DBFE$ 的法向量，即 $\overrightarrow{AC}=(-2，2，0)$，

又 $\overrightarrow{CE}=(0，-2，2)$，$\overrightarrow{CF}=(2，0，1)$，设平面 CEF 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x，y，z)$，

则有 $\begin{cases}\overrightarrow{CE}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\\overrightarrow{CF}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-2y+2z=0,\\2x+z=0,\end{cases}$ 取 $z=1$，则 $x=-\frac{1}{2}$，$y=1$，$\therefore\boldsymbol{n}=\left(-\frac{1}{2}，1，1\right)$.

设二面角 $C-EF-D$ 的大小为 θ，则 $\cos\langle\boldsymbol{n}，\overrightarrow{AC}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{1+2}{\frac{3}{2}\times2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

又二面角 $C-EF-D$ 为锐角，所以 $\theta=\frac{\pi}{4}$.

23（1）从 5 个顶点中随机选取 3 个点构成三角形，共有 $C_5^3=10$ 种取法.其中 $X=2$ 的三角形如 $\triangle ABD$，这类三角形共有 $C_4^3=4$ 个.因此 $P(X=2)=\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}$.

（2）由题意，X 的可能取值为 $\sqrt{5}$，2，$2\sqrt{2}$.

其中 $X=\sqrt{5}$ 的三角形是侧面，这类三角形共有 4 个；

其中 $X=2\sqrt{2}$ 的三角形有两个，$\triangle PAC$ 和 $\triangle PBD$.

因此 $P(X=\sqrt{5})=\dfrac{2}{5}$，$P(X=2\sqrt{2})=\dfrac{1}{5}$.

所以随机变量 X 的概率分布列为：

X	$\sqrt{5}$	2	$2\sqrt{2}$
$P(X)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$

所求数学期望 $E(X)=\sqrt{5}\times\frac{2}{5}+2\times\frac{2}{5}+2\sqrt{2}\times\frac{1}{5}=\frac{2\sqrt{5}+2\sqrt{2}+4}{5}$.

24.【答案】(1) $f(2)=8, f(3)=44, f(4)=140$ (2) 4.

【解析】

试题分析：(1) 先化简 $f(n)=(3n+2)(C_2^2+C_3^2+C_4^2+\cdots+C_n^2)=(3n+2)C_{n+1}^3$，再代入求值：$f(2)=8, f(3)=44, f(4)=140$ (2) 猜想所有 $f(n)$ 的最大公约数为 4. 即证 $f(k)=(3k+2)C_{k+1}^3$ 能被 4 整除，因为当 $n=k+1$ 时，$f(k+1)=(3k+5)C_{k+2}^3$，根据组合数性质化简得 (2)

$(3k+2)C_{k+2}^3+3C_{k+2}^3=(3k+2)(C_{k+1}^3+C_{k+1}^2)+(k+2)C_{k+1}^2=(3k+2)C_{k+1}^3+4(k+1)C_{k+1}^2$，以下就可得证

试题解析：解：(1) 因为 $f(n)=(3n+2)(C_2^2+C_3^2+C_4^2+\cdots+C_n^2)=(3n+2)C_{n+1}^3$，学科网

所以 $f(2)=8, f(3)=44, f(4)=140$. ……………… 3 分

由（1）中结论可猜想所有 $f(n)$ 的最大公约数为 4. ………………4 分

下面用数学归纳法证明所有的 $f(n)$ 都能被 4 整除即可.

（i）当 $n=2$ 时，$f(2)=8$ 能被 4 整除，结论成立； ………………5 分

（ii）假设 $n=k$ 时，结论成立，即 $f(k)=(3k+2)C_{k+1}^3$ 能被 4 整除，[来源:学科网 ZXXK]

则当 $n=k+1$ 时，$f(k+1)=(3k+5)C_{k+2}^3$

$=(3k+2)C_{k+2}^3+3C_{k+2}^3$

$=(3k+2)(C_{k+1}^3+C_{k+1}^2)+(k+2)C_{k+1}^2$ ………………7 分

$=(3k+2)C_{k+1}^3+(3k+2)C_{k+1}^2+(k+2)C_{k+1}^2$

$=(3k+2)C_{k+1}^3+4(k+1)C_{k+1}^2$，此式也能被 4 整除，即 $n=k+1$ 时结论也成立.

综上所述，所有 $f(n)$ 的最大公约数为 4. …………10 分