违背了教学原则；二是用“画图说明”（甚至用计算机呈现图形）替代逻辑推理，失去了数学的严谨性和思维性.如用“$x\to+\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$”替代“找到实数 a，使 $f(a)>0$”.高考命题组给出的参考解答具有严谨、精炼、规范的特点，但由于没有给出解决问题的思维过程，师生很难领悟解决问题的思想与策略，对有些直接给出的结论，学生感到百思不得其解，无益学生理性思维的发展.

要走出函数与导数综合问题的教学困境，师生要通过函数单调性、极值、零点、不等式等关键问题的研究与实践，悟出解决函数与导数综合问题的基本路径和主要策略.

函数图象刻画了函数的性质，图象为抽象的推理提供了形象支持，在茫然的思路中，图象指引着推理的方向[3].因此研究函数与导数综合问题要利用直观想象与推理论证相结合的方法.

基本路径：求导 → 画图 → 推证.

① 求导，确定函数单调区间.

② 画图，根据函数单调性和关键点（如极值点、坐标轴交点、定义域区间端点等）画出函数图象.

③ 推证，依托图象明晰推理方向.

主要策略　以形助数、化归转化（数式变形、消元换元、变量分离、适度放缩、设而不求、整体代换等）、构建函数、特值验证、再次求导、分类讨论等.

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部制定.普通高中数学课程标准[M].北京：人民教育出版社，2017.

[2] 黄如炎.构建函数探寻不等式求证思路[J].数学通报，2019(12)：48-51.

[3] 黄如炎.几道高考压轴题的自然解法与解题思考[J].中学数学研究，2019(02)：44-47.

作者简介　黄如炎(1964—)，男，福建闽清人，中学正高级教师，特级教师.在 CN 刊物发表 90 多篇论文，所教学生获福建省高考理科数学状元、福州市连续三年高考总分状元，曾任福建省特级教师评委、福建师大教育硕士论文答辩委员会主席、闽清一中校长、闽清教师进修学校校长等职.

极值偏移　转化为本

——2021 年新高考Ⅰ卷第 22 题解法探究

山东枣庄市第三中学　277101　黄丽生

【摘　要】 本文以 2021 年新高考Ⅰ卷一道高考压轴题为载体，从五种视角分析，运用多种不同的方法进行解答，旨在通过研究试题的命题特征，寻求解决一类问题的方法与规律.

【关键词】 高考；极值点偏移；函数；不等式

2021 年使用新高考Ⅰ卷的有七个省份，人数之多，影响之大，试题注定是万众瞩目的焦点.其中第 22 题是一道关于函数与导数的压轴试题，本题虽然是考查极值点偏移，却别有洞天，考查利用导数研究函数的单调性，证明不等式，考查逻辑推理，数学运算的能力.试题设计新颖，立意之深，背景之妙，让人感觉不漏痕迹，难以下手.正是因为条件的不同变形形式，才导致了解法的多样性，灵活性.可见，试题“暗藏”着一定的潜在价值，唯有很强的思维洞察力，方可识破玄机，需要我们去探索发现，做一番研究.

题目　(2021 年全国Ⅰ卷第 22 题) 已知函数 $f(x)=x(1-\ln x)$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2) 设 a,b 为两个不相等的正数，且 $b\ln a-a\ln b=a-b$，证明：$2<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<\mathrm{e}$.

视角 1　构造对称函数

解法 1　第一问解答略，证明第二问不等式.

先证明左侧：因为 $b\ln a-a\ln b=a-b$，故 $b(\ln a+1)=a(\ln b+1)$，即 $\frac{\ln a+1}{a}=\frac{\ln b+1}{b}$，故 $f\left(\frac{1}{a}\right)=f\left(\frac{1}{b}\right)$，设 $\frac{1}{a}=x_1$，$\frac{1}{b}=x_2$.因为 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)=x(1-\ln x)>0$，$x\in(\mathrm{e},+\infty)$ 时，$f(x)=x(1-\ln x)<0$，不妨设 $0<x_1<1$，$1<x_2<\mathrm{e}$.先证 $x_1+x_2>2$，若 $x_2\geqslant 2$，$x_1+x_2>2$ 必成立.若 $x_2<2$，要证 $x_1+x_2>2$，即证 $x_1>2-x_2$，而 $0<2-x_2<1$，故即证 $f(x_1)>f(2-x_2)$，又因为 $f(x_1)=f(x_2)$，所以只需证 $f(x_2)>f(2-x_2)$，其中 $1<x_2<2$.

设 $g(x)=f(x)-f(2-x)$，$1<x<2$，则 $g'(x)=f'(x)+f'(2-x)=-\ln x-\ln(2-x)=-\ln[x(2-x)]$，因为 $1<x<2$，故 $0<x(2-x)<1$，故 $-\ln x(2-x)>0$，所以 $g'(x)>0$，故 $g(x)$ 在 $(1,2)$ 为增函数，所以 $g(x)>g(1)=0$，故 $f(x)>f(2-x)$，即 $f(x_2)>f(2-x_2)$ 成立，所以 $x_1+x_2>2$ 成立，综上，$x_1+x_2>2$ 成立.

证明右侧：欲证 $x_1+x_2<\mathrm{e}$，即证明 $1<x_2<\mathrm{e}-x_1$，又因为 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递减，即证明 $f(x_1)=f(x_2)>f(\mathrm{e}-x_1)$，即 $f(x_1)-f(\mathrm{e}-x_1)>0$，令 $g(x)=f(x)-f(\mathrm{e}-x)$，$x\in(0,1)$，$g'(x)=-\ln(\mathrm{e}x-x^2)$，令 $\varphi(x)=\mathrm{e}x-x^2$，$x\in(0,1)$，则 $\varphi(x)\in(0,\mathrm{e}-1)$，所以 $\exists x_0\in(0,1)$，使得 $\varphi(x_0)=1$，此时 $g'(x_0)=0$，又因为 $x\in(0,1)$，$\varphi(x)$ 单调递增，$y=-\ln x$ 单调递减；所以，当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)$ 单调递减，所以 $x\in(0,x_0)$，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，当 $x\in(x_0,1)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，所以 $g(x)>\min\{g(1),g(0)\}$，而 $g(1)=f(1)-f(\mathrm{e}-1)=(\mathrm{e}-1)\left[\frac{1}{\mathrm{e}-1}+\ln(\mathrm{e}-1)-1\right]$，令 $u(x)=\frac{1}{x}+\ln x-1$，当 $x>1$ 时，$u'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x^2}$，易得 $u(x)>u(1)=0$，所以 $u\left(\frac{1}{\mathrm{e}-1}\right)>0$. 而 $x\to0$，$g(x)\to0$，所以 $g(x)>0$，$x_1\in(0,1)$，所以 $g(x_1)>0$，即 $f(x_1)>f(\mathrm{e}-x_1)$，待证不等式成立.

方法与规律 解决本题的关键是将已知条件进行转化，然后利用已知函数 $f(x)=x(1-\ln x)$，再利用其单调性完成证明；当然条件也可转化为"$\frac{1}{\mathrm{e}a}\ln\frac{1}{\mathrm{e}a}=\frac{1}{\mathrm{e}b}\ln\frac{1}{\mathrm{e}b}$"，这样需构造"$g(x)=x\ln x$"，则 $g(x_1)=g(x_2)$，只需证明：$\frac{2}{\mathrm{e}}<x_1+x_2<1$，然后左边不等式再通过构造对称函数即可证明.

视角2 引入参数，融合双变量

解法2 通过上面的分析，条件转化为 $\frac{1}{a}\ln\frac{1}{\mathrm{e}a}=\frac{1}{b}\ln\frac{1}{\mathrm{e}b}\Leftrightarrow\frac{1}{\mathrm{e}a}\ln\frac{1}{\mathrm{e}a}=\frac{1}{\mathrm{e}b}\ln\frac{1}{\mathrm{e}b}$，令 $x_1=\frac{1}{\mathrm{e}a}$，$x_2=\frac{1}{\mathrm{e}b}$，这样需构造"$g(x)=x\ln x$"，则 $g(x_1)=g(x_2)$，只需证明：$\frac{2}{\mathrm{e}}<x_1+x_2<1$，左边证明，即构造 $\varphi(x)=g(x)-g\left(\frac{2}{\mathrm{e}}-x\right)$，$x\in(0,1)$，以下同解法一(省略). 下证右边不等式，令 $g(x)=x\ln x$，易知 $g(x)$ 在 $x\in\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$ 上单调递增，令 $g(x_1)=g(x_2)=\lambda$，$\lambda\in\left(-\frac{1}{\mathrm{e}},0\right)$，则 $\begin{cases}x_1\ln x_1=\lambda,\\x_2\ln x_2=\lambda,\end{cases}$ 相加得 $\ln(x_1x_2)=\frac{\lambda(x_1+x_2)}{x_1x_2}$，即 $\lambda(x_1+x_2)=x_1x_2\ln(x_1x_2)$，所以 $\lambda(x_1+x_2)=g(x_1x_2)$，又 $0<x_1x_2<x_1<\frac{1}{\mathrm{e}}$，且 $g(x)$ 在 $x\in\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$ 单调递减，所以 $g(x_1x_2)>g(x_1)=\lambda$，所以 $\lambda(x_1+x_2)>\lambda$，又 $\lambda\in\left(-\frac{1}{\mathrm{e}},0\right)$，所以 $x_1+x_2<1$，所以 $\frac{2}{\mathrm{e}}<x_1+x_2<1$ 成立.

方法与规律 在处理极值点偏移问题时，通常是引入参数通过零点的相关性质变为双变量形式，然后找到结构的共性后换元或消参处理.

视角3 变双变量为新变量

解法3 设 $x_2=tx_1$，则 $t>1$，又 $x_1(1-\ln x_1)=x_2(1-\ln x_2)$，将 x_2 带入易得 $1-\ln x_1=t(1-\ln t-\ln x_1)$，故 $\ln x_1=\frac{t-1-t\ln t}{t-1}$，此时要证：$2<x_1+x_2<\mathrm{e}$，即证 $\ln2<\ln(x_1+x_2)<1$，即证明：$\ln2<1-\frac{t\ln t}{t-1}+\ln(t+1)<1$ 成立. 先证右半边，此时等价证明 $(t-1)\ln(t+1)-t\ln t<0$，令 $g(t)=(t-1)\ln(t+1)-t\ln t$，$t>1$，$g'(t)=\ln\left(\frac{1}{t}+1\right)-\frac{2}{t+1}$，令 $G(x)=\ln(x+1)-\frac{2x}{x+1}(0<x<1)$，则 $G'(x)=\frac{x-1}{(x+1)^2}<0$，$G(x)$ 在 $x\in(0,1)$ 单调递减，此时，$G(1)<G(x)<G(0)$ 单调递增，所以 $\ln2-1<G(x)<0$，令 $x=\frac{1}{t}$，得 $\ln2-1<g'(t)<0$，所以 $g(t)$ 单调递减，所以 $g(t)<g(1)=0$，右边不等式证毕. 再证左半边，此时等价证明 $(t-1)(1-\ln2)-t\ln t+(t-1)\ln(t+1)>0$，令 $\varphi(t)=(t-1)(1-\ln2)-t\ln t+(t-1)\ln(t+1)$，则 $\varphi'(t)=\ln\left(\frac{1}{t}+1\right)-\frac{2}{t+1}+1-\ln2$，由 $g'(t)>\ln2-1$，得 $\varphi'(t)>0$，所以 $\varphi(t)$ 单调递增，所以 $\varphi(t)>\varphi(1)=0$，左边不等式证毕.

方法与规律 处理极值点偏移问题的一个常用方法就是变双变量为新变量，通过零点的相关性

质,将不等式中的双变量与一个新变量建立联系,然后构造关于新变量的函数,最后转化为不等式恒成立问题.

视角 4　借助常用不等式放缩

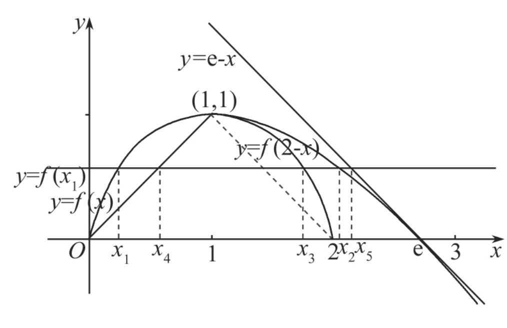
解法 4　先用常用不等式 $\ln x < \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)$(证明略),$x > 1$ 实现放缩,有 $\frac{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} - a\right)}{a} < \frac{1 + \ln a}{a} = \frac{1 + \ln b}{b} < \frac{1 + \frac{1}{2}\left(b - \frac{1}{b}\right)}{b}$,整理得 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > 2$.

再利用 $\ln x < x - 1, x > 1$ 证明右半边不等式,由解法 1,不妨设 $0 < x_1 < 1, x_2 > 1$,$x_2(1 - \ln x_2) = x_2 \ln \frac{\mathrm{e}}{x_2} < x_2\left(\frac{\mathrm{e}}{x_2} - 1\right) = \mathrm{e} - x_2$,又因为 $\ln x_1 < 0$,所以 $x_1(1 - \ln x_1) > x_1$,$x_1 < x_1 - x_1 \ln x_1 = f(x_1) = f(x_2) = x_2(1 - \ln x_2) < \mathrm{e} - x_2$,所以,$x_1 < \mathrm{e} - x_2$,即 $x_1 + x_2 < \mathrm{e}$.

方法与规律　解决本题的关键是要深入分析待证不等式特征,寻找合适不等式进行放缩.如果仅仅利用不等式的性质则很难完成,必要时需要构造函数加以辅助证明. 比如,证明右半边不等式成立,因为 $0 < x_1 < 1 < x_2 < \mathrm{e}$,有 $1 - \ln x_1 > 1$,所以 $x_1(1 - \ln x_1) = x_2(1 - \ln x_2) > x_1$,所以 $x_1 + x_2 < x_2 + x_2(1 - \ln x_2)$,令 $h(x) = x + x(1 - \ln x)$,$h'(x) = 1 - \ln x$,当 $1 < x < \mathrm{e}$ 时,$h'(x) > 0$,此时 $h(x) < h(\mathrm{e}) = \mathrm{e}$,所以 $x_2 + x_2(1 - \ln x_2) < \mathrm{e}$,所以,$x_1 + x_2 < \mathrm{e}$.

视角 5　利用切割线放缩

解法 5　由下面图象,作出割线 $y = x$,作出图象在 $(\mathrm{e}, 0)$ 处的切线 $y = \mathrm{e} - x$,显然可得:$x_1 + x_2 > x_1 + x_3 = 2$,$x_1 + x_2 < x_4 + x_5 = \mathrm{e}$,因此不等式 $2 < x_1 + x_2 < \mathrm{e}$ 成立.



因为 $f(x)$ 在 $(\mathrm{e}, 0)$ 的切线 $\varphi(x) = \mathrm{e} - x$,$H(x) = f(x) - \varphi(x) = 2x - x\ln x - \mathrm{e}$,$x \in (0, \mathrm{e})$,$H'(x) = 1 - \ln x > 0$,所以 $H(x)$ 递增,$H(x) < H(\mathrm{e}) = 0$,所以 $x \in (0, \mathrm{e})$,$f(x) < \varphi(x)$;同理可证:当 $0 < x < 1$ 时,$f(x) > x$.

令 $t = f(x_1) = f(x_2)$,则 $t = f(x_2) < \varphi(x_2) = \mathrm{e} - x_2 \Rightarrow t + x_2 < \mathrm{e}$,又 $t = f(x_1) = x_1(1 - \ln x_1)$,$x_1 \in (0, 1)$,所以 $t = x_1(1 - \ln x_1) > x_1$,即 $x_1 + x_2 < t + x_2 < \mathrm{e}$. 证毕.

方法与规律　切割放缩法是处理极值点偏移的另一种比较灵活的方法,解题的关键点是根据条件选择合适的放缩函数. 对于右边不等式的证明是将两个零点都放大,$x_1 + x_2 < x_4 + x_5$,使用的是切线放缩,左边不等式证明用割线放缩. 先研究函数 $f(x)$ 与割线、切线的位置关系,然后通过切割线斜率的互为相反数,自然得到 $x_4 + x_5$ 为定值.

探索启示　一道高考导数压轴题,创新意识浓厚. 第二问打破常规给出函数的零点或极值点,然后证明一个不等式成立,而是给出一个双变量的等式来证明一个不等式. 该题聚焦核心素养,突出关键能力考查,体现了高考数学的科学选拔功能和育人导向作用. 简朴中显特色,平凡中见真谛,提高了考生观察思辨的能力. 很有开发的价值,无疑是一道经典之作.

本题虽是压轴试题,但入口宽,第一问较简单. 第二问解法具有开放性,横看成岭侧成峰,远近高低各不同,因为着眼点不同,解题的方式方法不同,效果也就大不相同. 并且每种方法所用到的知识比较基础,不偏不怪,但要想拿到满分,须具备较强的思维能力和分析问题、解决问题的能力,彰显了重视理性思维,坚持素养导向、能力为重的命题原则. 试题内涵丰富、思想深刻,将知识内容和等价转化、构造函数(或不等式)、数形结合、引参换元等数学方法融为一体,让人感觉平凡中出新意,有滋味、有嚼头、有厚度. 总之,2021 年高考数学全国卷试题很好地落实了立德树人、服务选才、引导教学的高考核心功能,同时突出数学学科特色,发挥了高考数学科的选拔功能,对深化中学数学教学改革发挥了积极的导向作用. 此题启示我们,数学教学应加强数学知识间的联系,突出数学思想方法的挖掘、提炼和渗透; 注重思维探究,突出培养学生面对新问题的选择应变能力和分析、解决问题的能力.

作者简介　黄丽生,高级教师,教育硕士. 中国民主同盟盟员,山东初等数学研究会理事. 主要从事教育数学、高考与竞赛数学、高校强基计划试题研究. 已在《数学通报》《中学数学教学参考》《数学通讯》《数学教学》等 30 余家期刊上发表学术论文 120 余篇. 2014 年被全国初等数学研究会授予第五届中国"中青年初等数学研究奖"称号,个人学术成果曾在山东曲阜师范大学主办的《中学数学杂志》(2004,5) "新秀近作"栏目中报道.