南师附中 2019 届高三年级模拟考试

数学参考答案及评分标准　　2019.05

一、填空题（本大题共 14 小题，每小题 5 分，计 70 分. 不需写出解答过程，请把答案写在答题纸的指定位置上）

1. $\{0,1\}$　　2. -3　　3. 18　　4. $\frac{1}{3}$　　5. $[0,1)$

6. 3　　7. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$　　8. -13　　9. $-\sqrt{2}$　　10. 18

11. $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$　　12. $(6,3)$　　13. 20，21　　14. $\{-6\}$

二、解答题（本大题共 6 小题，计 90 分.解答应写出必要的文字说明，证明过程或演算步骤，请把答案写在答题纸的指定区域内）

15. (本小题满分 14 分)

解：因为锐角 α 的终边与单位圆交于点 A，点 A 的纵坐标是$\frac{\sqrt{10}}{10}$，

所以由任意角的三角函数的定义可知，$\sin\alpha=\frac{\sqrt{10}}{10}$.

从而 $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$. ……………………3 分

（1）于是 $\cos(\alpha-\frac{3\pi}{4})=\cos\alpha\cos\frac{3\pi}{4}+\sin\alpha\sin\frac{3\pi}{4}$

$=\frac{3\sqrt{10}}{10}\times(-\frac{\sqrt{2}}{2})+\frac{\sqrt{10}}{10}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$. ……………………6 分

（2）因为钝角 β 的终边与单位圆交于点 B，且点 B 的横坐标是$-\frac{\sqrt{5}}{5}$，

所以 $\cos\beta=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，从而 $\sin\beta=-\sqrt{1-\cos^2\beta}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$. ……………………8 分

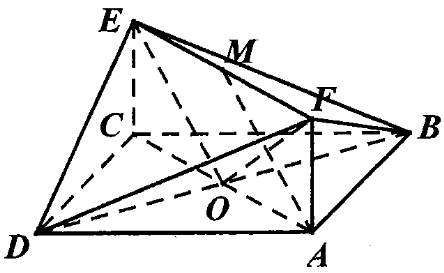
于是 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$=\frac{\sqrt{10}}{10}\times\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)+\frac{3\sqrt{10}}{10}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. ……………………10 分

因为 α 为锐角，β 为钝角，所以 $\alpha+\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$， ……………………12 分

从而 $\alpha+\beta=\frac{3\pi}{4}$. ……………………14 分

16. (本小题满分 14 分)



解：(1)设 $AC\cap BD=O$，连结 OE，

∵四边形 $ACEF$ 是矩形，∴$EF// AC$，$EF=AC$.

∵O 是正方形 $ABCD$ 对角线的交点，

∴O 是 AC 的中点.

又∵M 是 EF 的中点，∴$EM// AO$，$EM=AO$.

∴四边形 $AOEM$ 是平行四边形，

∴$AM// OE$. ……………………………………………………………4 分

∵ $OE\subset$ 平面 BDE， $AM\not\subset$ 平面 BDE，

∴$AM//$ 平面 BDE ……………………………………………………………7 分

(2) ∵正方形 $ABCD$，∴$BD\perp AC$.

∵平面 $ABCD\cap$平面 $ACEF=AC$，平面 $ABCD\perp$平面 $ACEF$，$BD\subset$平面 $ABCD$，

∴$BD\perp$平面 $ACEF$. ……………………………………………9 分

∵$AM\subset$平面 $ACEF$，∴$BD\perp AM$. ……………………………………………10 分

∵正方形 $ABCD$，$AD=\sqrt{2}$，∴$OA=1$.

由（1）可知点 M、O 分别是 EF、AC 的中点，且 $ACEF$ 是矩形，

又∵$AF=1$，∴$AOMF$ 是正方形， ……………………………11 分

∴$AM\perp OF$. ……………………………………………………………12 分

又 $AM\perp BD$，且 $OF\cap BD=O$，$OF\subset$平面 BDF，$BD\subset$平面 BDF，

∴$AM\perp$平面 BDF. ……………………………………………………………14 分

17. (本小题满分 14 分)

解：(1) 连 PC. 由条件得 $\theta\in(0,\dfrac{\pi}{2})$.

在三角形 POC 中，$OC=10$，$OP=20$，$\angle POC=\pi-2\theta$，由余弦定理，得

$PC^2=OC^2+OP^2-2OC\cdot OP\cos(\pi-2\theta)=100(5+4\cos2\theta)$， ……………2 分

因为 PQ 与半圆 C 相切于 Q，所以 $CQ\perp PQ$ ，

所以 $PQ^2=PC^2-CQ^2=400(1+\cos2\theta)$，所以 $PQ==20\sqrt{2}\cos\theta$. …………4 分

所以四边形 $COPQ$ 的周长为

$f(\theta)=CO+OP+PQ+QC=40+20\sqrt{2}\cos\theta$.

即 $f(\theta)=40+20\sqrt{2}\cos\theta$，$\theta\in(0,\ \frac{\pi}{2})$. ……………………7 分

（没写定义域，扣 2 分）

（2）设四边形 $COPQ$ 的面积为 $S(\theta)$，则

$S(\theta)=S_{\triangle OCP}+S_{\triangle QCP}=100(\sqrt{2}\cos\theta+2\sin\theta\cos\theta)$，$\theta\in(0,\ \frac{\pi}{2})$. ……………………10 分

所以 $S'(\theta)=100(-\sqrt{2}\sin\theta+2\cos^2\theta-2\sin^2\theta)=100(-4\sin^2\theta-\sqrt{2}\sin\theta+2)$，$\theta\in(0,\ \frac{\pi}{2})$.

……………………12 分

令 $S'(t)=0$，得 $\sin\theta=\frac{\sqrt{34}-\sqrt{2}}{8}$.

列表：

$\sin\theta$	$(0,\ \frac{\sqrt{34}-\sqrt{2}}{8})$	$\frac{\sqrt{34}-\sqrt{2}}{8}$	$(\frac{\sqrt{34}-\sqrt{2}}{8},\ 1)$
$S'(\theta)$	+	0	−
$S(\theta)$	增	最大值	减

答：要使改建成的展示区 $COPQ$ 的面积最大，$\sin\theta$ 的值为 $\frac{\sqrt{34}-\sqrt{2}}{8}$. …………14 分

18．(本小题满分 16 分)

解：（1）依题意，$2c=a=2$，$\therefore$ $c=1$，$b=\sqrt{3}$.

所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ……………4 分

（2）①因为直线 l 分别与直线 $x=-4$ 和直线 $x=-1$ 相交，

所以，直线 l 一定存在斜率. ……………………6 分

②设直线 l：$y=kx+m$，

由 $\begin{cases} y=kx+m, \\ 3x^2+4y^2=12, \end{cases}$ 得 $(4k^2+3)x^2+8kmx+4(m^2-3)=0$，

由 $\Delta=(8km)^2-4\times(4k^2+3)\times4(m^2-3)=0$，

得 $4k^2+3-m^2=0$. ① ……………8 分

把 $x=-4$ 代入 $y=kx+m$，得 $M(-4,\ -4k+m)$，

把 $x=-1$ 代入 $y=kx+m$，得 $N(-1,\ -k+m)$， ……………10 分

所以 $|NF_1|=|-k+m|$，

$|MF_1|=\sqrt{(-4+1)^2+(-4k+m)^2}=\sqrt{9+(-4k+m)^2}$， ② ………12 分

由①式，得 $3=m^2-4k^2$， ③

把③式代入②式，得 $|MF_1|=\sqrt{4(k-m)^2}=2|-k+m|$，

$\therefore\ \dfrac{|NF_1|}{|MF_1|}=\dfrac{|k-m|}{2|k-m|}=\dfrac{1}{2}$，即$\dfrac{|NF_1|}{|MF_1|}$为定值$\dfrac{1}{2}$. ……………16 分

19. (本小题满分 16 分)

解：解：（1）①$a_1=2^{\frac{1\times2}{2}}=2$； ……………………………2 分

②当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=\dfrac{a_1a_2\cdot\cdots\cdot a_{n-1}a_n}{a_1a_2\cdot\cdots\cdot a_{n-1}}=\dfrac{2^{\frac{n(n+1)}{2}}}{2^{\frac{(n-1)n}{2}}}=2^n$.

所以，数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2^n(n\in\mathbf{N}^*)$. ……………………………4 分

（2）由 $S_n=\dfrac{n(b_1+b_n)}{2}$，得 $2S_n=n(b_1+b_n)$， ①

所以 $2S_{n-1}=(n-1)(b_1+b_{n-1})$，$n\geqslant2$. ②

由②－①，得 $2b_n=b_1+nb_n-(n-1)b_{n-1}$，$n\geqslant2$，

即 $b_1+(n-2)b_n-(n-1)b_{n-1}=0$，$n\geqslant2$， ③

所以，$b_1+(n-3)b_n-(n-2)b_{n-1}=0$，$n\geqslant3$. ④

由④－③，得 $(n-2)b_n-2(n-2)b_{n-1}+(n-2)b_{n-2}=0$，$n\geqslant3$， ……………6 分

因为 $n\geqslant3$，所以 $n-2>0$，上式同除以（$n-2$），得

$b_n-2b_{n-1}+b_{n-2}=0$，$n\geqslant3$，

即 $b_{n+1}-b_n=b_n-b_{n-1}=\cdots=b_2-b_1=1$，

所以，数列$\{b_n\}$时首项为 1，公差为 1 的等差数列，

故 $b_n=n$，$n\in\mathbf{N}^*$. ……………………………8 分

（3）因为 $c_n=\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{b_n\cdot b_{n+1}}=\dfrac{1}{2^n}-\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n(n+1)}[\dfrac{n(n+1)}{2^n}-1]$. …………10 分

所以 $c_1=0$，$c_2>0$，$c_3>0$，$c_4>0$，$c_5<0$.

记$f(n)=\dfrac{n(n+1)}{2^n}$，

当 $n\geqslant5$ 时，$f(n+1)-f(n)=\dfrac{(n+1)(n+2)}{2^{n+1}}-\dfrac{n(n+1)}{2^n}=-\dfrac{(n+1)(n-2)}{2^{n+1}}<0$，

所以，当 $n\geqslant5$ 时，数列$f(n)$为单调递减，当 $n\geqslant5$ 时，$f(n)<f(5)<\dfrac{5\times6}{2^5}<1$.

从而，当 $n\geqslant5$ 时，$c_n=\dfrac{1}{n(n+1)}[\dfrac{n(n+1)}{2^n}-1]<0$. …………14 分

因此 $T_1<T_2<T_3<T_4$，$T_4>T_5>T_6>\cdots$.

所以，对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，$T_4\geqslant T_n$.

综上，$m=4$. …………16 分

（注：其它解法酌情给分.）

20. (本小题满分 16 分)

解：（1）当 $a<0$ 时，因为 $f'(x)=a(x+1)e^x$，当 $x<-1$ 时，$f(x)>0$；

当 $x>-1$ 时，$f(x)<0$．所以函数 $f(x)$ 单调减区间为 $(-\infty,-1)$；单调增区间为 $(-1,+\infty)$． ……………2 分

（2）由 $f(x)\geqslant 2x^2+bx$，得 $axe^x\geqslant 2x^2+bx$，由于 $x>0$，

所以 $ae^x\geqslant 2x+b$ 对任意的 $a\geqslant 1$ 及任意的 $x>0$ 恒成立，

由于 $e^x>0$，所以 $ae^x\geqslant e^x$，所以 $e^x-2x\geqslant b$ 对任意的 $x>0$ 恒成立， ……………4 分

设 $\varphi(x)=e^x-2x$，$x>0$，

则 $\varphi'(x)=e^x-2$，所以函数 $\varphi(x)$ 在 $(0,\ \ln 2)$ 上单调递减，在 $(\ln 2,\ +\infty)$ 上单调递增，

所以 $\varphi(x)_{\min}=\varphi(\ln 2)=2-2\ln 2$，

所以 $b\leqslant 2-2\ln 2$． ……………6 分

（3）由 $h(x)=axe^x+x+\ln x$，得 $h'(x)=a(x+1)e^x+1+\dfrac{1}{x}=\dfrac{(x+1)(axe^x+1)}{x}$，其中 $x>0$．

①若 $a\geqslant 0$ 时，则 $h'(x)>0$，所以函数 $h(x)$ 在 $(0,\ +\infty)$ 上单调递增，所以函数 $h(x)$ 至多有一个零点，不合题意； ……………8 分

②若 $a<0$ 时，令 $h'(x)=0$，得 $xe^x=-\dfrac{1}{a}>0$．

由第（2）小题，知：当 $x>0$ 时，$\varphi(x)=e^x-2x\geqslant 2-2\ln 2>0$，所以 $e^x>2x$，所以 $xe^x>2x^2$，所以当 $x>0$ 时，函数 xe^x 的值域为 $(0,\ +\infty)$．

所以，存在 $x_0>0$，使得 $ax_0e^{x_0}+1=0$，即 $ax_0e^{x_0}=-1$，　　①

且当 $x<x_0$ 时，$h'(x)>0$，所以函数 $h(x)$ 在 $(0,\ x_0)$ 上单调递增，在 $(x_0,\ +\infty)$ 上单调递减．因为函数有两个零点 x_1，x_2，

所以 $h(x)_{\max}=h(x_0)=ax_0e^{x_0}+x_0+\ln x_0=-1+x_0+\ln x_0>0$．②

设 $\varphi(x)=-1+x+\ln x$，$x>0$，则 $\varphi'(x)=1+\dfrac{1}{x}>0$，所以函数 $\varphi(x)$ 在 $(0,\ +\infty)$ 单调递增，由于 $\varphi(1)=0$，所以当 $x>1$ 时，$\varphi(x)>0$．所以，②式中的 $x_0>1$，

又由①式，得 $x_0e^{x_0}=-\dfrac{1}{a}$．

由第（1）小题可知，当 $a<0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(0,\ +\infty)$ 上单调递减，所以 $-\dfrac{1}{a}>e$，

即 $a\in(-\dfrac{1}{e},\ 0)$． ……………11 分

当 $a\in(-\dfrac{1}{e},\ 0)$ 时，

（i）由于 $h(\dfrac{1}{e})=\dfrac{ae^{\frac{1}{e}}}{e}+(\dfrac{1}{e}-1)<0$，所以 $h(\dfrac{1}{e})\cdot h(x_0)<0$，又因为 $\dfrac{1}{e}<1<x_0$，且函数 $h(x)$ 在 $(0,\ x_0)$ 上单调递减，函数 $h(x)$ 的图象在 $(0,\ x_0)$ 上不间断，所以函数 $h(x)$ 在 $(0,\ x_0)$ 上恰有一个零点； ……………13 分

(ⅱ)由于 $h(-\frac{1}{a})=-e^{-\frac{1}{a}}-\frac{1}{a}+\ln(-\frac{1}{a})$，令 $t=-\frac{1}{a}>e$，

设 $F(t)=-e^t+t+\ln t$，$t>e$，

由于 $t>e$ 时，$\ln t<t$，$e^t>2t$，所以设 $F(t)<0$，即 $h(-\frac{1}{a})<0$.

由①式，得，当 $x_0>1$ 时，$-\frac{1}{a}=x_0e^{x_0}>x_0$，且 $h(-\frac{1}{a})\cdot h(x_0)<0$，同理可得函数 $h(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 上也恰有一个零点.

综上，$a\in(-\frac{1}{e},0)$. ……………16 分

数学附加题参考答案及评分标准　　2019.05

说明：

21.【选做题】在 A、B、C 三小题中只能选做 2 题，每小题 10 分，共计 20 分．请在答题卡指定区域内作答．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

A．选修 4—2：矩阵与变换

解：（1）由题意，由矩阵的逆矩阵公式得 $B=A^{-1}=\begin{bmatrix}1&1\\0&-1\end{bmatrix}$， ………………5 分

（2）矩阵 B 的特征多项式 $f(\lambda)=(\lambda+1)(\lambda-1)$， ………………7 分

令 $f(\lambda)=0$，解得 $\lambda=1$ 或 -1， ………………9 分

所以矩阵 B 的特征值为 1 或 -1. ……………10 分

B．选修 4—4：坐标系与参数方程

解：将圆 $\rho=2a\sin\theta$ 化成普通方程为 $x^2+y^2=2ay$，整理得 $x^2+(y-a)^2=a^2$. …………3 分

将直线 $\rho\cos(\theta+\frac{\pi}{4})=1$ 化成普通方程为 $x-y-\sqrt{2}=0$. …………6 分

因为相切，所以圆心到直线的距离等于半径，即 $\frac{|a+\sqrt{2}|}{\sqrt{2}}=a$ …………9 分

解得 $a=2+\sqrt{2}$. ………………10 分

C．选修 4—5：不等式选讲

解：因为 $(\sqrt{1-x}+\sqrt{3x+2})^2=(\sqrt{3-3x}\cdot\sqrt{\frac{1}{3}}+\sqrt{3x+2}\cdot\sqrt{1})^2$

$\leqslant(3-3x+3x+2)(\frac{1}{3}+1)=\frac{20}{3}$， ……………………………………………3 分

所以 $y=\sqrt{1-x}+\sqrt{3x+2}\leqslant\frac{2\sqrt{15}}{3}$. ……………………………………………5 分

等号当且仅当$\dfrac{3-3x}{\frac{1}{3}}=\dfrac{3x+2}{1}$，即$x=\dfrac{7}{12}\in[-\dfrac{2}{3},1]$时成立. ……………………8 分

所以y的最大值为$\dfrac{2\sqrt{15}}{3}$. ……………………………………………………………10 分

22.（本小题满分 10 分）

解:（1）因为$PA\perp$平面$ABCD$，且$AB,AD\subset$平面$ABCD$，

所以$PA\perp AB$， $PA\perp AD$，

又因为$\angle BAD=90^\circ$，所以PA,AB,AD两两互相垂直.

分别以AB,AD,AP为x,y,z轴建立空间直角坐标系，

则由$AD=2AB=2BC=4$， $PA=4$可得

$A(0,0,0)$，$B(2,0,0)$，$C(2,2,0)$，$D(0,4,0)$，$P(0,0,4)$，

又因为M为PC的中点，所以$M(1,1,2)$.

所以$\overrightarrow{BM}=(-1,1,2)$，$\overrightarrow{AP}=(0,0,4)$， ……………………2 分

所以$\cos\langle\overrightarrow{AP},\overrightarrow{BM}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BM}}{|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{BM}|}$

$=\dfrac{0\times(-1)+0\times1+4\times2}{4\times\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$， ……………………4 分

所以异面直线AP，BM所成角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. ……………………5 分

（2）因为$AN=\lambda$，所以$N(0,\lambda,0)$ $(0\leqslant\lambda\leqslant4)$，则$\overrightarrow{MN}=(-1,\lambda-1,-2)$，

$\overrightarrow{BC}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{PB}=(2,0,-4)$，

设平面PBC的法向量为$\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PD}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}2y=0,\\ 2x-4z=0.\end{cases}$令$x=2$，解得$y=0$，$z=1$，

所以$\boldsymbol{m}=(2,0,1)$是平面PBC的一个法向量. ……………………7 分

因为直线MN与平面PBC所成角的正弦值为$\dfrac{4}{5}$，

所以$|\cos\langle\overrightarrow{MN},\boldsymbol{m}\rangle|=\dfrac{|\overrightarrow{MN}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\overrightarrow{MN}||\boldsymbol{m}|}=\dfrac{|-2-2|}{\sqrt{5+(\lambda-1)^2}\cdot\sqrt{5}}=\dfrac{4}{5}$，

解得$\lambda=1\in[0,4]$，

所以λ的值为1. ……………………………………………………………10 分

23.（本小题满分 10 分）

23.（本小题满分 10 分）

解：（1）　$L(1)=2$ ……………………………1 分

$L(2)=6$， ……………………………2 分

$L(3)=20$， ……………………………3 分

（2）设 m 为沿 x 轴正方向走的步数（每一步长度为 1），则反方向也需要走 m 步才能回到 y 轴上，所以 $m=0$，1，2，……，$[\frac{n}{2}]$，（其中 $[\frac{n}{2}]$ 为不超过 $\frac{n}{2}$ 的最大整数）

总共走 n 步，首先任选 m 步沿 x 轴正方向走，再在剩下的 $n-m$ 步中选 m 步沿 x 轴负方向走，最后剩下的每一步都有两种选择（向上或向下），即 $C_n^m \cdot C_{n-m}^m \cdot 2^{n-2m}$

$$\therefore L(n)=\sum_{m=0}^{[\frac{n}{2}]} C_n^m \cdot C_{n-m}^m \cdot 2^{n-2m}=\begin{cases}\sum_{m=0}^{\frac{n-1}{2}} C_n^m \cdot C_{n-m}^m \cdot 2^{n-2m} & n\text{为奇数}\\ \sum_{m=0}^{\frac{n}{2}} C_n^m \cdot C_{n-m}^m \cdot 2^{n-2m} & n\text{为偶数}\end{cases}$$ ……………7 分

等价于求 $(x+1)^{2n}$ 中含 x^n 项的系数，为 C_{2n}^n

$$(x+1)^{2n}=(x^2+2x+1)^n=[(2x+1)+x^2]^n=\sum_{r=0}^{n} C_n^r \cdot (2x+1)^{n-r} \cdot x^{2r}$$

其中含 x^n 项的系数为

$$\sum_{r=0}^{[\frac{n}{2}]} C_n^r \cdot C_{n-r}^{n-2r} \cdot 2^{n-2r}=\begin{cases}\sum_{r=0}^{\frac{n-1}{2}} C_n^r \cdot C_{n-r}^{n-2r} \cdot 2^{n-2r} & n\text{为奇数}\\ \sum_{r=0}^{\frac{n}{2}} C_n^r \cdot C_{n-r}^{n-2r} \cdot 2^{n-2r} & n\text{为偶数}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\sum_{r=0}^{\frac{n-1}{2}} C_n^r \cdot C_{n-r}^{r} \cdot 2^{n-2r} & n\text{为奇数}\\ \sum_{r=0}^{\frac{n}{2}} C_n^r \cdot C_{n-r}^{r} \cdot 2^{n-2r} & n\text{为偶数}\end{cases}=\sum_{r=0}^{[\frac{n}{2}]} C_n^r \cdot C_{n-r}^r \cdot 2^{n-2r}=C_{2n}^n=L(n)$$

故 $L(n)=C_{2n}^n$. ………………………10 分