# 江苏省仪征中学2020届高三上学期数学周末限时训练4（2019.9.28）

范围：集合与逻辑、函数与导数、三角函数、平面向量、复数、直线和圆

一、填空题（共计14小题，每小题5分，共计70分）

1．设全集 $U$＝{1,2,3,4}，集合 $A$＝{ 1,3,4}，则$\complement_U A$＝________ .

2．写出命题:“若 $x>2$，则 $x>1$”的否命题:________.

3．复数 $(1+i)(2+i)$ 的模等于________.

4. 设 $a\in R$，则“$a=-2$”是“直线 $l_1: ax+2y-1=0$ 与直线 $l_2: x+(a+1)y+4=0$ 平行”

的________条件.

5．已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足$|\boldsymbol{a}|$＝1，$\boldsymbol{b}$＝(2，1)，且 $\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=0(\lambda\in\mathbf{R})$，则$|\lambda|$＝________.

6．曲线 C：$y=\cos x+\ln x+2$ 在 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 处的切线斜率为___________.

7．已知 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{2}{3}$，$\tan(\beta-\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{1}{7}$，则 $\tan(\alpha+\dfrac{\pi}{4})=$__________.

8．圆心在曲线 $y=\dfrac{2}{x}(x>0)$ 上，且与直线 $2x+y+1=0$ 相切的面积最小的圆的方程为__________.

9．已知函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+ax, x\ge 0 \\ bx^2-3x, x<0 \end{cases}$ 为奇函数，则不等式 $f(x)<4$ 的解集为________.

10．若圆$□:□^2+□^2=5$与圆$□_1:(x-m)^2+□^2=20(m\in R)$相交于 $A$,$B$ 两点,且两圆在点 $A$ 处的切线互相垂直,则线段 $AB$ 的长是_____.

11．设 $a\in R$，若 $x>0$ 时均有 $[(a-1)x-1](x^2-ax-1)\ge 0$，则 $a=$________.

12．设函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin\dfrac{\pi x}{m}$，若存在 $f(x)$的极值点 $x_0$ 满足 $x_0^2+[f(x_0)]^2<m^2$，则 $m$ 的取值范围是______________.

13．已知 $a>b>1$,且 $2\log_a b+3\log_b a=7$，那么 $a+\dfrac{1}{b^2-1}$ 的最小值为________.

14. 已知函数 $f(x)=\dfrac{6\ln x}{x}$，关于 $x$ 的不等式 $f^2(x)+af(x)+b^2>0$ 有且只有一个整数解，则实数 $a$ 的取值范围是________

二、解答题（共计 6 小题，第 15,16,17 题每题 14 分，第 18,19,20 题每题 16 分，共计 90 分）

15．已知函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\cos^2 x-\dfrac{1}{2}, x\in R$ .

（1）求函数 $f(x)$ 的最小正周期和单调递减区间;

（2）设△ $ABC$ 的内角 $A, B, C$ 的对边分别为 $a, b, c$ 且 $c=\sqrt{3}$， $f(C)=0$，若 $\sin B=2\sin A$，求 $a, b$ 的值.

16．在直角坐标系 $xOy$ 中，已知点 $A(1，1)$，$B(2，3)$，$C(3，2)$，点 $P(x，y)$在△$ABC$ 三边围成的区域(含边界)上.

(1)若$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}$，求$|\overrightarrow{OP}|$;

(2)设$\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}(m，n\in\mathbf{R})$，用 $x$，$y$ 表示 $m-n$，并求 $m-n$ 的最大值.

17. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知点$A(-3,4)$，$B(9,0)$，C，D 分别为线段 OA，OB 上的动点，且满足$AC=BD$

(1)若$AC=4$，求直线 CD 的方程；

(2)证明：$\triangle OCD$的外接圆恒过定点.

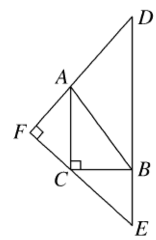
18. 如图，$ABC$ 为一直角三角形草坪，其中$\angle C=90°$，$BC=2$ m，$AB=4$ m，为了重建草坪，设计师准备了两套方案：

方案一：扩大为一个直角三角形，其中斜边 $DE$ 过点 $B$，且与 $AC$ 平行，$DF$ 过点 $A$，$EF$ 过点 $C$；

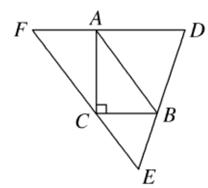
方案二：扩大为一个等边三角形，其中 $DE$ 过点 $B$，$DF$ 过点 $A$，$EF$ 过点 $C$.

(1)求方案一中三角形 $DEF$ 面积 $S_1$ 的最小值；

(2)求方案二中三角形 $DEF$ 面积 $S_2$ 的最大值.

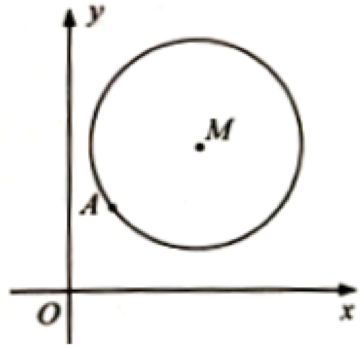


方案一



方案二

19．在平面直角坐标系 $xOy$ 中,已知以 $M$ 为圆心的圆 $M$：$x^2+y^2-12x-14y+60=0$ 及其上一点 $A(2,4)$.




(1)设圆 $N$ 与 $x$ 轴相切,与圆 $M$ 外切,且圆心 $N$ 在直线 $x=6$ 上,求圆 $N$ 的标准方程;

(2)设平行于 $OA$ 的直线 $l$ 与圆 $M$ 相交于 $B,C$ 两点,且 $BC=OA$,求直线 $l$ 的方程;

(3)设点 $T(t,0)$ 满足：存在圆 $M$ 上两点 $P$ 和 $Q$,使得 $\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TP}=\overrightarrow{TQ}$,求实数 $t$ 的取值范围.

20． 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}ax^2+\ln x,\ g(x)=-bx,$ 其中 $a,b\in R$，设 $h(x)=f(x)-g(x)$，

（1）若 $f(x)$ 在 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 处取得极值，且 $f'(1)=g(-1)-2$．求函数 $h(x)$ 的单调区间；

（2）若 $a=0$ 时，函数 $h(x)$ 有两个不同的零点 $x_1,x_2$。

① 求 $b$ 的取值范围；　　② 求证：$\dfrac{x_1x_2}{e^2}>1$．

江苏省仪征中学2020届高三上学期数学周末限时训练4（2019.9.28）

# 高三数学附加题

21．变换$T_1$是逆时针旋转$\frac{\pi}{2}$的旋转变换，对应的变换矩阵是$M_1$；变换$T_2$对应的变换矩阵是$M_2=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$.

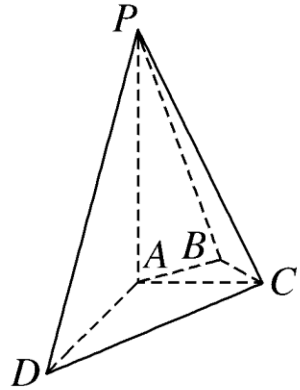
（1）求点$P(2,1)$在变换$T_1$作用下的点$P'$的坐标；

（2）求函数$y=x^2$的图象依次在变换$T_1$，$T_2$作用下所得曲线的方程.

22． 如图，在四棱锥**$P$-$ABCD$中**，**$PA$**⊥平面**$ABCD$，$AC$⊥$AD$，$AB$⊥$BC$，∠$BAC$＝45°，$PA$＝$AD$＝2，$AC$＝1.**

**(1)**求二面角 **$A$-$PC$-$D$** 的余弦值；

**(2)**设 **$E$** 为棱 **$PA$** 上的点，满足异面直线 **$BE$** 与 **$CD$** 所成的角为 **30°**，求 **$AE$** 的长.



23．在一次电视节目的抢答中，题型为判断题，只有“对”和“错”两种结果，其中某明星判断正确的概率为 $p$，判断错误的概率为$q$，若判断正确则加 1 分，判断错误则减 1 分，现记“该明星答完$n$题后总得分为$S_n$”.

（1）当 $p=q=\dfrac{1}{2}$ 时，记 $\xi=|S_3|$，求$\xi$的分布列及数学期望；

（2）当 $p=\dfrac{1}{3},q=\dfrac{2}{3}$ 时，求 $S_8=2$且$S_i\geq 0(i=1,2,3,4)$ 的概率.

24．已知 $p(p\geq 2)$ 是给定的某个正整数，数列$\{a_n\}$满足：$a_1=1,(k+1)a_{k+1}=p(k-p)a_k$，其中$k=1,2,3,\cdots,p-1$.

（1）设 $p=4$，求$a_2,a_3,a_4$；

（2）求$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_p$.

# 江苏省仪征中学2020届高三上学期数学周末限时训练4（2019.9.28）

# 高 三 数 学 答 案

一、填空题

1. $\{2\}$；　2. “若 $x\le 2$，则 $x\le 1$”；　3. $\sqrt{10}$；　4. 充分不必要；

5. $\sqrt{5}$；6. $\dfrac{2-\pi}{\pi}$；　7. $\dfrac{11}{23}$；　8. $(x-1)^2+(y-2)^2=5$；　9. $(-\infty,4)$；

10. 4；　11. $\dfrac{3}{2}$；　12. $(-\infty，-2)\cup(2，+\infty)$；　13. 3；　14. $(-2\ln 3,-3\ln 2]$

二、解答题

15. （1）$T=\pi$，$[k\pi+\dfrac{\pi}{3},k\pi+\dfrac{5\pi}{6}],k\in Z$；（2）$\boldsymbol{a=1}$，$\boldsymbol{b=2}$.

试题解析：（1）$\boldsymbol{f(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\dfrac{1+\cos 2x}{2}-\dfrac{1}{2}=\sin(2x-\dfrac{\pi}{6})-1}$，

则最小正周期是 $\boldsymbol{T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi}$；　由 $2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\le 2x-\dfrac{\pi}{6}\le 2k\pi+\dfrac{3\pi}{2},(k\in Z)$，得

$\boldsymbol{f(x)}$ 的单调递减区间 $[k\pi+\dfrac{\pi}{3},k\pi+\dfrac{5\pi}{6}],k\in Z$，

（2）$\boldsymbol{f(C)=\sin(2C-\dfrac{\pi}{6})-1=0}$，则 $\boldsymbol{\sin(2C-\dfrac{\pi}{6})-1=0}$，

$\boldsymbol{0<C<\pi}$，$\boldsymbol{0<2C<2\pi}$，所以 $\boldsymbol{-\dfrac{\pi}{6}<2C-\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{11\pi}{6}}$，

所以 $\boldsymbol{2C-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}}$，$\boldsymbol{C=\dfrac{\pi}{3}}$，

因为 $\boldsymbol{\sin B=2\sin A}$，所以由正弦定理得 $\boldsymbol{b=2a}$，　①

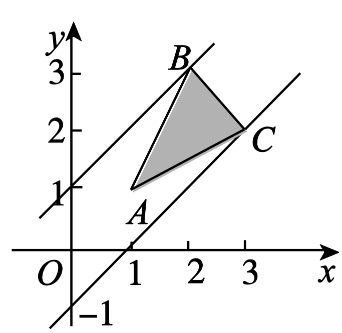
由余弦定理得 $\boldsymbol{c^2=a^2+b^2-2ab\cos\dfrac{\pi}{3}}$，即 $\boldsymbol{c^2=a^2+b^2-ab=3}$　②

由①②解得：$\boldsymbol{a=1}$，$\boldsymbol{b=2}$.

16. 解：(1)方法一：∵$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}$，

又 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=(1-x，1-y)+(2-x，3-y)+(3-x，2-y)=(6-3x，6-3y)$，

∴$\begin{cases}6-3x=0,\\6-3y=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=2,\\y=2,\end{cases}$ 即 $\overrightarrow{OP}=(2，2)$，故 $|\overrightarrow{OP}|=2\sqrt{2}$.




方法二：∵$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=0$，

则 $(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP})+(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP})+(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OP})=0$，

∴$\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=(2，2)$，∴$|\overrightarrow{OP}|=2\sqrt{2}$.

(2)∵$\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$，∴$(x，y)=(m+2n，2m+n)$，

∴$\begin{cases}x=m+2n,\\y=2m+n,\end{cases}$ 两式相减得，$m-n=y-x$，

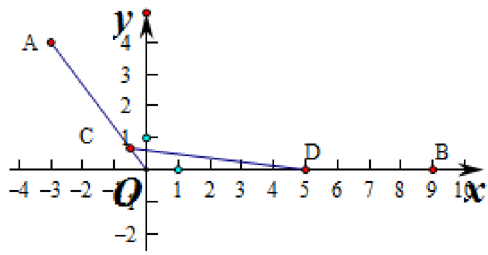
令 $y-x=t$，由图知，当直线 $y=x+t$ 过点 $B(2，3)$ 时，$t$ 取得最大值 1，故 $m-n$ 的最大值为 1.

17. 解：(1)若$AC=4$，则$BD=4$， $\because B(9,0)$，$\therefore D(5,0)$， $\because A(-3,4)$， $\therefore |OA|=\sqrt{3^2+4^2}=5$，

则$|OC|=1$， 直线 $OA$ 的方程为$y=-\frac{4}{3}x$，设$C(3a,-4a)$，$-1<a<0$，

则$|OC|=\sqrt{9a^2+16a^2}=\sqrt{25a^2}=5|a|=-5a=1$，

解得$a=-\frac{1}{5}$，则$C(-\frac{3}{5},\frac{4}{5})$，则 $CD$ 的方程为$\frac{y-0}{\frac{4}{5}-0}=\frac{x-5}{-\frac{3}{5}-5}$，




整理得$x+7y-5=0$，

即直线 $CD$ 的方程为$x+7y-5=0$；

(2)证明：$\triangle OCD$的外接圆恒过定点.

设$C(3a,-4a)$，$-1<a<0$，

则$|AC|=\sqrt{(3a+3)^2+(4+4a)^2}=\sqrt{25(a+1)^2}=5|a+1|=5(a+1)$，则

$|BD|=|AC|=5(a+1)$，则$D(4-5a,0)$，设$\triangle OCD$的外接圆的一般方程为

$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，

$\because O(0,0)$，$C(3a,-4a)$，$-1<a<0$，$D(4-5a,0)$，

$\therefore$圆的方程满足$\begin{cases}F=0\\9a^2+16a^2+3aD-4aE+F=0\\(4-5a)^2+(4-5a)D+F=0\end{cases}$，即$\begin{cases}25a^2+3aD-4aE=0\\(4-5a)(4-5a+D)=0\end{cases}$，

则$\begin{cases}25a+3D-4E=0\\D=5a-4\end{cases}$，解得$E=10a-3$，$F=0$，$D=5a-4$，

则圆的一般方程为$x^2+y^2+(5a-4)x+(10a-3)y=0$，

即$x^2+y^2-4x-3y+5a(x+2y)=0$，由$\begin{cases}x+2y=0\\x^2+y^2-4x-3y=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$或$\begin{cases}x=2\\y=-1\end{cases}$，

即：$\triangle OCD$的外接圆恒过定点$(0,0)$和$(2,-1)$.

18. **解**：(1)在 Rt$\triangle AFC$ 中，设$\angle ACF=\alpha$，$0°<\alpha<90°$

则 $AF=2\sqrt{3}\sin\alpha$，$FC=2\sqrt{3}\cos\alpha$，

因为 $DE/\!/AC$，所以$\angle E=\alpha$，$EC=\dfrac{2}{\sin\alpha}$，

且$\dfrac{FA}{AD}=\dfrac{FC}{CE}$，即$\dfrac{2\sqrt{3}\sin\alpha}{AD}=\dfrac{2\sqrt{3}\cos\alpha}{\frac{2}{\sin\alpha}}$，解得 $AD=\dfrac{2}{\cos\alpha}$，

所以 $S_1=\dfrac{1}{2}\left(2\sqrt{3}\sin\alpha+\dfrac{2}{\cos\alpha}\right)\left(2\sqrt{3}\cos\alpha+\dfrac{2}{\sin\alpha}\right)=3\left(\sin 2\alpha+\dfrac{4}{3\sin 2\alpha}\right)+4\sqrt{3}$，

所以当 $\sin 2a=1$，即 $\alpha=45°$ 时，$S_1$ 有最小值 $7+4\sqrt{3}$ m$^2$.

(2)在三角形 $DBA$ 中，

设$\angle DBA=\beta$，$0°<\beta<120°$，则$\dfrac{DB}{\sin(120°-\beta)}=\dfrac{AB}{\sin 60°}$，解得 $DB=\dfrac{8}{\sqrt{3}}\sin(120°-\beta)$，

在三角形 $CBE$ 中，有$\dfrac{EB}{\sin\beta}=\dfrac{CB}{\sin 60°}$，解得 $EB=\dfrac{4}{\sqrt{3}}\sin\beta$，

则等边三角形的边长为

$\dfrac{8}{\sqrt{3}}\sin(120°-\beta)+\dfrac{4}{\sqrt{3}}\sin\beta=\dfrac{4}{\sqrt{3}}(2\sin\beta+\sqrt{3}\cos\beta)$，

所以边长的最大值为$\dfrac{4\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$ m，所以面积 $S_2$ 的最大值为$\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\dfrac{4\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\right)^2=\dfrac{28\sqrt{3}}{3}$ m$^2$.

19. 解：(1) $\because N$在直线$x=6$上，

$\therefore$设$N(6,n)$，

$\because$圆 $N$ 与 $x$ 轴相切，

$\therefore$圆 $N$ 为：$(x-6)^2+(y-n)^2=n^2$，

又圆 $N$ 与圆 $M$ 外切，圆 $M$：$x^2+y^2-12x-14y+60=0$，

即圆 $M$：$(x-6)^2+(y-7)^2=25$，

$\therefore |7-n|=|n|+5$，解得$n=1$，

$\therefore$圆 $N$ 的标准方程为$(x-6)^2+(y-1)^2=1$.

(2)由题意得$OA=2\sqrt{5}$，$k_{OA}=2$，

设 $l$：$y=2x+b$，

则圆心 $M$ 到直线 $l$ 的距离：$d=\frac{|12-7+b|}{\sqrt{2^2+1}}=\frac{|5+b|}{\sqrt{5}}$，

则$|BC|=2\sqrt{5^2-d^2}=2\sqrt{25-\frac{(5+b)^2}{5}}$，$BC=2\sqrt{5}$，

即$2\sqrt{25-\frac{(5+b)^2}{5}}=2\sqrt{5}$，

解得$b=5$或$b=-15$，

$\therefore$直线 $l$ 的方程为：$y=2x+5$或$y=2x-15$.

(3)设$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，

$\because A(2,4)$，$T(t,0)$，$\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TP}=\overrightarrow{TQ}$，

$\therefore \overrightarrow{TA}=\overrightarrow{PQ}$

$\therefore \begin{cases} x_2=x_1+2-t \\ y_2=y_1+4 \end{cases}$，①

∴点 $Q$ 在圆 $M$ 上,

$\therefore (x_2-6)^2+(y_2-7)^2=25$,②

将①代入②,得$(x_1-t-4)^2+(y_1-3)^2=25$,

∴点$P(x_1,y_1)$在圆 $M$ 上,

又在圆$[x-(t+4)]^2+(y-3)^2=25$上,

从而圆$(x-6)^2+(y-7)^2=25$与圆$[x-(t+4)]^2+(y-3)^2=25$有公共点,

$\therefore 5-5\le\sqrt{[(t+4)-6]^2+(3-7)^2}\le 5+5$.

解得$2-2\sqrt{21}\le t\le 2+2\sqrt{21}$,

∴实数 $t$ 的取值范围是$[2-2\sqrt{21},2+2\sqrt{21}]$.

20、解:(1)由已知得 $f'(x)=ax+\frac{1}{x}$,($x>0$),

所以 $f'(\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{\sqrt{2}}{2}a+\sqrt{2}=0$,所以 $a=-2$.

由 $f'(1)=g(-1)-2$,得 $a+1=b-2$,所以 $b=1$.……………4 分

所以 $h(x)=-x^2+\ln x+x$,($x>0$).

则$h'(x)=-2x+\frac{1}{x}+1=\frac{2(x+\frac{1}{2})(x-1)}{-x}$,($x>0$),

由 $h'(x)>0$ 得 $0<x<1$,$h'(x)<0$ 得 $x>1$.

所以 $h(x)$ 的减区间为($1$,$+\infty$),增区间为($0$,$1$).……………7 分

(2)①由已知 $h(x)=\ln x+bx$,($x>0$).所以 $h'(x)=\frac{1}{x}+b$,($x>0$),

当 $b\geqslant 0$ 时,显然 $h'(x)>0$ 恒成立,此时函数 $h(x)$ 在定义域内递增,$h(x)$ 至多有一个零点,不合题意.

当 $b<0$ 时,令 $h'(x)=0$ 得 $x=-\frac{1}{b}>0$,令 $h'(x)>0$ 得$0<x<-\frac{1}{b}$;令 $h'(x)<0$ 得 $x>-\frac{1}{b}$.

所以 $h(x)_{极大}=h(-\frac{1}{b})=-\ln(-b)-1>0$,解得 $-\frac{1}{e}<b<0$.

且 $x\to 0$ 时,$\ln x<0$,$x\to+\infty$时,$\ln x>0$.

所以当$b\in(-\frac{1}{e},0)$时,$h(x)$ 有两个零点.……………11 分

②由题意得 $\ln x_1+bx_1=0$,$\ln x_2+bx_2=0$

$\therefore \ln x_1x_2+b(x_1+x_2)=0$,$\ln x_2-\ln x_1+b(x_2-x_1)=0$,

$\therefore \frac{\ln x_1x_2}{\ln x_2-\ln x_1}==\frac{x_1+x_2}{x_2-x_1}$,不妨设 $x_1<x_2$

要证 $x_1x_2>e^2$,

只需要证 $\ln x_1x_2>\frac{x_1+x_2}{x_2-x_1}$（$\ln x_2-\ln x_1$）$>2$，即证 $\ln x_2-\ln x_1>\frac{2(x_2-x_1)}{x_2+x_1}$，

设 $t=\frac{x_2}{x_1}$，$t>1$，则 $F(t)=\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1}=\ln t+\frac{4}{t+1}-2$，

$\therefore F'(t)=\frac{1}{t}-\frac{4}{(t+1)^2}=\frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$，

∴函数 $F(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，而 $F(1)=0$，

$\therefore F(t)>0$，即 $\ln t>\frac{2(t-1)}{t+1}$，$\therefore x_1x_2>e^2$，$\therefore \frac{x_1x_2}{e^2}>1$. ……………16 分

# 江苏省仪征中学2020届高三上学期数学周末限时训练4（2019.9.28）

## 高三数学理科附加答案

21.（1）$M_1=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$，$M_1\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ 2\end{bmatrix}$

所以点$P(2,1)$在$T_1$作用下的点$P'$的坐标是$P'(-1,2)$.

（2）$M=M_2M_1=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$，

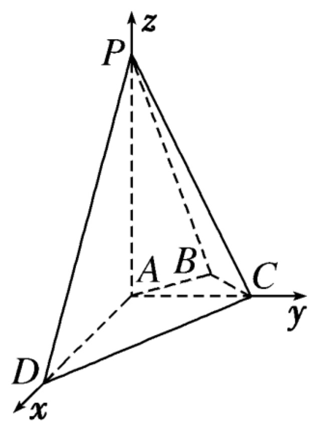
设$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$是变换后图像上任一点，与之对应的变换前的点是$\begin{bmatrix}x_0\\ y_0\end{bmatrix}$，则$M\begin{bmatrix}x_0\\ y_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$，

也就是$\begin{cases}x_0-y_0=x\\ x_0=y\end{cases}$，即$\begin{cases}x_0=y\\ y_0=y-x\end{cases}$，所以，所求曲线的方程是$y-x=y^2$.

22. **解**：(1)因为$PA\perp$平面$ABCD$，

所以$PA\perp AD$，$PA\perp AC$，

又因为$AC\perp AD$，故以$A$为原点，以$AD$，$AC$，$AP$所在直线为$x$轴，$y$轴，$z$轴建立如图所示空间直角坐标系$A$-$xyz$，




依题意得$A(0,0,0),D(2,0,0),C(0,1,0),B\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right),P(0,0,2)$.

$\overrightarrow{PC}=(0,1,-2)$，$\overrightarrow{CD}=(2,-1,0)$.

设平面$PCD$的法向量$n=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{PC}=0,\\ n\cdot\overrightarrow{CD}=0,\end{cases}$ 即$\begin{cases}y-2z=0,\\ 2x-y=0.\end{cases}$

不妨令$z=1$，可得$n=(1,2,1)$，

可取平面$PAC$的法向量$m=(1,0,0)$.

于是$\cos\langle m,n\rangle=\frac{m\cdot n}{|m|\cdot|n|}=\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$.

由图知二面角$A$-$PC$-$D$为锐角，

所以二面角$A$-$PC$-$D$的余弦值为$\frac{\sqrt{6}}{6}$.

(2)设点$E$的坐标为$(0,0,h)$，其中$h\in[0,2]$.

由此得$\overrightarrow{BE}=\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ h\right)$，由$\overrightarrow{CD}=(2,-1,0)$，

故$\cos\langle\overrightarrow{BE},\overrightarrow{CD}\rangle=\frac{\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{BE}|\cdot|\overrightarrow{CD}|}=\frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}+h^2}\times\sqrt{5}}=\frac{3}{\sqrt{10+20h^2}}$，

所以$\frac{3}{\sqrt{10+20h^2}}=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$，解得$h=\frac{\sqrt{10}}{10}$，

即$AE=\frac{\sqrt{10}}{10}$.

23. 解：（1）$\because \xi=|S_3|$的取值为 1，3，又 $p=q=\dfrac{1}{2}$；

故 $P(\xi=1)=2C_3^1(\dfrac{1}{2})\cdot(\dfrac{1}{2})^2=\dfrac{3}{4}$， $P(\xi=3)=(\dfrac{1}{2})^3+(\dfrac{1}{2})^3=\dfrac{1}{4}$.

∴ ξ 的分布列为：

| $\xi$ | 1 | 3 |
|---|---|---|
| $p$ | $\dfrac{3}{4}$ | $\dfrac{1}{4}$ |

所以：$E\xi=1\times\dfrac{3}{4}+3\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{2}$；

（2）当 $S_8=2$ 时，即答完 8 题后，回答正确的题为 5 题，回答错误的题是 3 题

又已知 $S_i\ge 0(i=1,2,3,4)$，若第一题和第二题回答正确，则其余 6 题可任意答对 3 题；

若第一题和第二题回答错误，第三题回答正确，则后 5 题可任意答对题.

此时的概率为 $P=(C_6^3+C_5^3)\cdot(\dfrac{1}{3})^5\cdot(\dfrac{2}{3})^3=\dfrac{30\times 8}{3^8}=\dfrac{80}{3^7}$(或$\dfrac{80}{2187}$).

24.（1）由 $(k+1)a_{k+1}=p(k-p)a_k$ 得 $\dfrac{a_{k+1}}{a_k}=p\times\dfrac{k-p}{k+1}$， $k=1,2,3,\cdots$， $p-1$

即 $\dfrac{a_2}{a_1}=-4\times\dfrac{4-1}{2}=-6$， $a_2=-6a_1=-6$； $\dfrac{a_3}{a_2}=-4\times\dfrac{4-2}{3}=-\dfrac{8}{3}$， $a_3=16$

$\dfrac{a_4}{a_3}=-4\times\dfrac{4-3}{4}=-1$， $a_4=-16$；

（2）由 $(k+1)a_{k+1}=p(k-p)a_k$ 得： $\dfrac{a_{k+1}}{a_k}=p\times\dfrac{k-p}{k+1}$， $k=1,2,3,\cdots$， $p-1$

即 $\dfrac{a_2}{a_1}=-p\times\dfrac{p-1}{2}$， $\dfrac{a_3}{a_2}=-p\times\dfrac{p-2}{3}$， $\cdots$， $\dfrac{a_k}{a_{k-1}}=-p\times\dfrac{p-(k-1)}{k}$，

以上各式相乘得 $\dfrac{a_k}{a_1}=(-p)^{k-1}\times\dfrac{(p-1)(p-2)(p-3)\cdots(p-k+1)}{k!}$

$$\therefore a_k=(-p)^{k-1}\times\frac{(p-1)(p-2)(p-3)\cdots(p-k+1)}{k!}$$

$$=(-p)^{k-1}\times\frac{(p-1)!}{k!(p-k)!}=\frac{(-p)^{k-1}}{p}\times\frac{p!}{k!(p-k)!}$$

$$=-(-p)^{k-2}\times C_p^k=-\frac{1}{p^2}C_p^k(-p)^k，\quad k=1,2,3,\cdots，\ p$$

$$\therefore a_1+a_2+a_3+\cdots+a_p$$

$$=-\frac{1}{p^2}[C_p^1(-p)^1+C_p^2(-p)^2+C_p^3(-p)^3+\cdots+C_p^p(-p)^p]$$

$$=-\frac{1}{p^2}[(1-p)^p-$$