

南通市 2021 届高三第一次调研测试

数学

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号.回答非选择题时，将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题.本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $A = \{x \in \mathbf{N} | 2 < x < 6\}$ ， $B = \{x | \log_2(x-1) < 2\}$ ， $A \cap B =$

A. $\{x | 3 \leq x < 5\}$ B. $\{x | 2 < x < 5\}$ C. $\{3, 4\}$ D. $\{3, 4, 5\}$

2. 已知 $2+i$ 是关于 x 的方程 $x^2 + ax + 5 = 0$ 的根，则实数 $a =$

A. $2-i$ B. -4 C. $2\frac{1}{2}$ D. 4

3. 哥隆尺是一种特殊的尺子.图 1 的哥隆尺可以一次性度量的长度为 1,2,3,4,5,6.图 2 的哥隆尺不能一次性度量的长度为

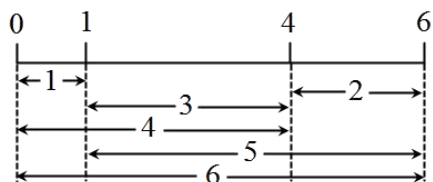


图1



图2

A. 11 B. 13 C. 15 D. 17

4. 医学家们为了揭示药物在人体呢吸收、排出的规律，常借助恒速静脉滴注一室模型来进行描述.在该模型中，人体内药物含量 x (单位：mg) 与给药时间 t (单位：h) 近似满足函数

关系式 $x = \frac{k_0}{k}(1 - e^{-kt})$ ，其中 k_0, k 分别称为给药速率和药物消除速率 (单位：mg/h).经测

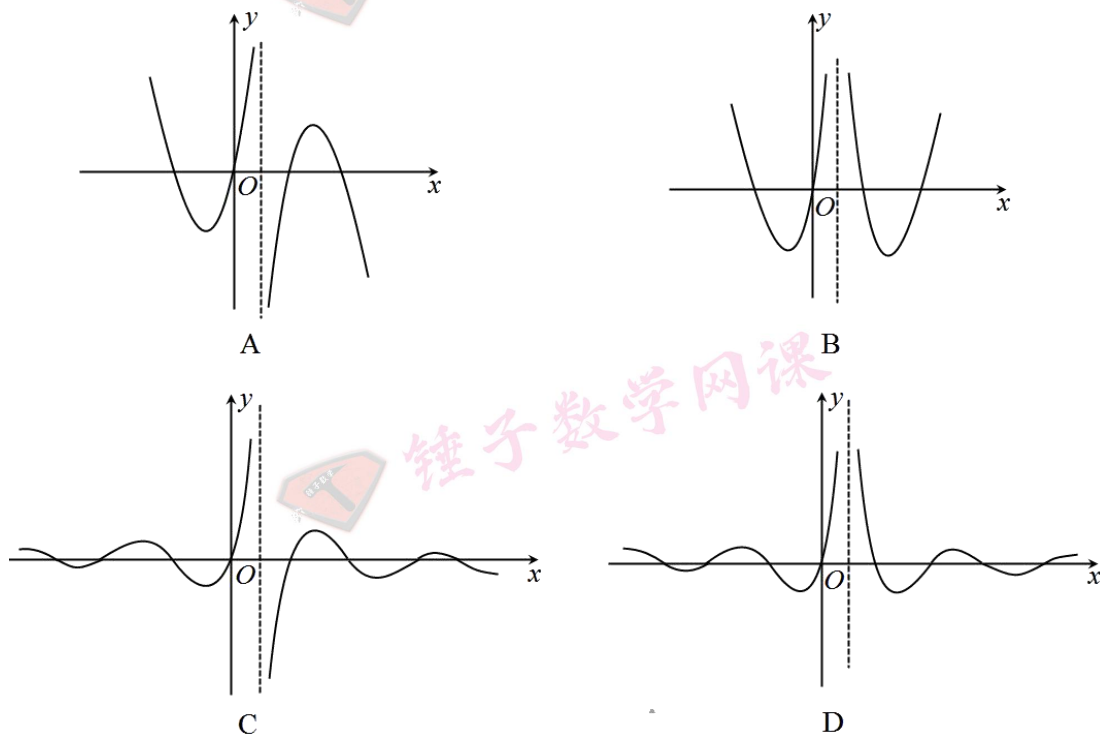
试发现，当 $t = 23$ 时， $x = \frac{k_0}{2k}$ ，则该药物的消除速率 k 的值约为 ($\ln 2 \approx 0.69$)

- A. $\frac{3}{100}$ B. $\frac{3}{10}$ C. $\frac{10}{3}$ D. $\frac{100}{3}$

5. $(1-2x)^n$ 的二项展开式中，奇数项的系数和为

- A. 2^n B. 2^{n-1} C. $\frac{(-1)^n + 3^n}{2}$ D. $\frac{(-1)^n - 3^n}{2}$

6. 函数 $y = \frac{\sin \pi x}{|2x-1|}$ 的图象大致为



7. 已知点 P 是 $\triangle ABC$ 所在平面内一点，有下列四个等式：

- 甲： $\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} = \mathbf{0}$ ； 乙： $\vec{PA} \cdot (\vec{PA} - \vec{PB}) = \vec{PC} \cdot (\vec{PA} - \vec{PB})$ ；
 丙： $|\vec{PA}| = |\vec{PB}| = |\vec{PC}|$ ； 丁： $\vec{PA} \cdot \vec{PB} = \vec{PB} \cdot \vec{PC} = \vec{PC} \cdot \vec{PA}$ 。

如果只有一个等式不成立，则该等式为

- A. 甲 B. 乙 C. 丙 D. 丁

8. 已知曲线 $y = \ln x$ 在 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ 两点处的切线分别与曲线 $y = e^x$ 相切于 $C(x_3, y_3)$ ，

$D(x_4, y_4)$ ，则 $x_1 x_2 + y_3 y_4$ 的值为

- A . 1 B . 2 C . $\frac{5}{2}$ D . $\frac{17}{4}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9 . 已知 m, n 是两条不重合的直线， α, β 是两个不重合的平面，则

- A . 若 $m \parallel \alpha$ ， $n \parallel \alpha$ ，则 $m \parallel n$
 B . 若 $m \parallel \alpha$ ， $m \perp \beta$ ，则 $\alpha \perp \beta$
 C . 若 $\alpha \parallel \beta$ ， $m \perp \alpha$ ， $n \perp \beta$ ，则 $m \parallel n$
 D . 若 $\alpha \perp \beta$ ， $m \parallel \alpha$ ， $n \parallel \beta$ ，则 $m \perp n$

10 . 已知函数 $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ ，则

- A . $f(x)$ 的最小正周期为 π
 B . 将 $y = \sin 2x$ 的图象上所有点向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，可得到 $f(x)$ 的图象
 C . $f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$ 上单调递增
 D . 点 $\left(-\frac{5\pi}{12}, 0\right)$ 是 $f(x)$ 图象的一个对称中心

11 . 若函数 $f(x) = \begin{cases} -x^3 - x + 2 + m, & x < 1, \\ x + 1 - \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$ 的值域为 $[2, +\infty)$ ，则

- A . $f(3) > f(2)$ B . $m \geq 2$
 C . $f\left(\frac{\ln 2}{2}\right) < f\left(\frac{1}{e}\right)$ D . $\log_m(m+1) > \log_{(m+1)}(m+2)$

12 . 冬末春初，乍暖还寒，人们容易感冒发热.若发生群体性发热，则会影响到人们的身体健康，干扰正常工作生产.某大型公司规定：若任意连续 7 天，每天不超过 5 人体温高于 37.3°C ，则称没有发生群体性发热.下列连续 7 天体温高于 37.3°C 人数的统计特征数中，能判定该公司没有发生群体性发热的为

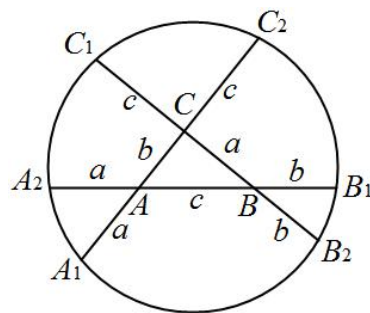
- A . 中位数为 3 , 众数为 2 B . 均值小于 1 , 中位数为 1
 C . 均值为 3 , 众数为 4 D . 均值为 2 , 标准差为 $\sqrt{2}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13 . 在正项等比数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_3 a_5 a_7 = 27$ ，则 $\sum_{i=1}^9 \log_3 a_i =$ _____.

14 . 已知双曲线 C 的渐近线方程为 $y = \pm 2x$ ，写出双曲线 C 的一个标准方程：_____.

15 . “康威圆定理”是英国数学家约翰·康威引以为豪的研究成果之一.定理的内容是这样的：如图， $\triangle ABC$ 的三条边长分别为 $BC = a$ ， $AC = b$ ， $AB = c$. 延长线段 CA 至点 A_1 ，使得 $AA_1 = a$ ，以此类推得到点 A_2, B_1, B_2, C_1 和 C_2 ，那么这六个点共圆，这个圆称为康威圆. 已知 $a = 4$ ， $b = 3$ ， $c = 5$ ，则由 $\triangle ABC$ 生成的康威圆的半径为_____.



16 . 已知在圆柱 O_1O_2 内有一个球 O ，该球与圆柱的上、下底面及母线均相切. 过直线 O_1O_2 的平面截圆柱得到四边形 $ABCD$ ，其面积为 8. 若 P 为圆柱底面圆弧 \widehat{CD} 的中点，则平面 PAB 与球 O 的交线长为_____.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17 . (10 分) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n + 2a_{n+1} = 3n + 5$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 记数列 $\left\{ \frac{1}{a_n a_{n+1}} \right\}$ 的前 n 项和为 S_n . 若 $\forall n \in \mathbf{N}^*$ ， $S_n < -\lambda^2 + 4\lambda$ (λ 为偶数)，求 λ 的值.

18 . (12 分) 在 ① $(b+a-c)(b-a+c) = ac$ ；② $\cos(A+B) = \sin(A-B)$ ；③

$\tan \frac{A+B}{2} = \sin C$ 这三个条件中任选两个，补充在下面问题中，若问题中的三角形存在，求 b

的值；若问题中的三角形不存在，说明理由.

问题：是否存在 $\triangle ABC$ ，它的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，且 $a = 2\sqrt{2}$ ，_____，

_____ ?

注：如果选择多个方案分别解答，按第一个方案解答计分.

19. (12分) 2019年4月，江苏省发布了高考综合改革实施方案，试行“3+1+2”高考新模式.为调研新高考模式下，某校学生选择物理或历史与性别是否有关，统计了该校高三年级800名学生的选科情况，部分数据如下表：

科目 \ 性别	性别		
	男生	女生	合计
物理	300		
历史		150	
合计	400		800

(1) 根据所给数据完成上述表格，并判断是否有99.9%的把握认为该校学生选择物理或历史与性别有关；

(2) 该校为了提高选择历史科目学生的数学学习兴趣，用分层抽样的方法从该类学生中抽取5人，组成数学学习小组.一段时间后，从该小组中抽取3人汇报数学学习心得.记3人中男生人数为 X ，求 X 的分布列和数学期望 $E(X)$.

附：
$$K^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a + b)(c + d)(a + c)(b + d)}$$

$P(K^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.8410	6.635	10.828

20. (12分) 如图，在正六边形 $ABCDEF$ 中，将 $\triangle ABF$ 沿直线 BF 翻折至 $\triangle A'BF$ ，使得平面 $A'BF \perp$ 平面 $BCDEF$ ， O ， H 分别为 BF 和 $A'C$ 的中点.

(1) 证明： $OH \parallel$ 平面 $A'EF$ ；

(2) 求平面 $A'BC$ 与平面 $A'DE$ 所成锐二面角的余弦值.

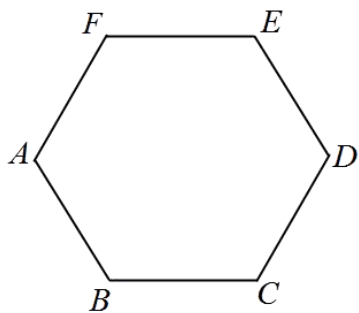


图1

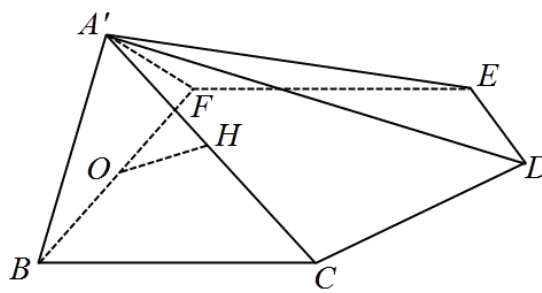


图2

21. (12分) 已知函数 $f(x) = x^2 - \frac{2\ln x}{x} - a$.

(1) 若 $f(x) \geq 0$, 求实数 a 的取值范围;

(2) 若函数 $f(x)$ 有两个零点 x_1, x_2 , 证明: $x_1 x_2 < 1$.

22. (12分) 已知点 A, B 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上, 点 A 在第一象限, O 为坐标原点,

且 $OA \perp AB$.

(1) 若 $a = \sqrt{3}$, $b = 1$, 直线 OA 的方程为 $x - 3y = 0$, 求直线 OB 的斜率;

(2) 若 $\triangle OAB$ 是等腰三角形 (点 O, A, B 按顺时针排列), 求 $\frac{b}{a}$ 的最大值.