江苏省仪征中学2021届高三数学考前保温训练（2）

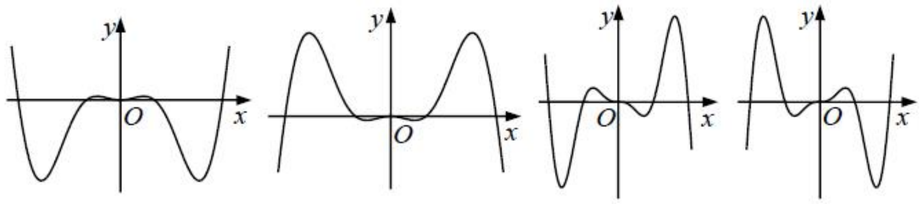
班级__________姓名__________用时__________得分__________

一、单项选择题

1. 已知集合 $A=\{x|x^2-x-6<0\}$，$B=\{x|\log_2(x-2)<1\}$，则 $(\complement_R A)\cap B=$（　）

A. $(-2,3)$　　B. $(2,3)$　　C. $[3,4)$　　D. $(-\infty,2]\cup[3,+\infty)$

2. 函数 $y=x^2\sin\pi x$ 的大致图象为（　）



A　　B　　C　　D

3. 对于数据组 (x_i,y_i) $(i=1,2,3,\cdots,n)$，如果由线性回归方程得到的对应于自变量 x_i 的估计值是 $\hat{y}_i$，那么将 $y_i-\hat{y}_i$ 称为相应于点 (x_i,y_i) 的残差．某工厂为研究某种产品产量 x（吨）与所需某种原材料 y（吨）的相关性，在生产过程中收集4组对应数据 (x,y) 如下表所示：

x	3	4	5	6
y	2.5	3	4	m

根据表中数据，得出 y 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y}=0.7x+a$，据此计算出样本 $(4,3)$ 处的残差为 -0.15，则表中 m 的值为（　）

A. 3.3　　B. 4.5　　C. 5　　D. 5.5

4. 已知 F 是双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的左焦点，圆 O：$x^2+y^2=a^2+b^2$ 与双曲线在第一象限的交点为 P，若 PF 的中点在双曲线的渐近线上，则此双曲线的离心率是（　）

A. $\sqrt{5}$　　B. 2　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

二、多项选择题

5. 已知 α，β 是两个不同的平面，m，n，l 是三条不同的直线，则下列命题中正确的是（　）

A. 若 $m\perp\alpha$，$n\perp\alpha$，则 $m\parallel n$　　B. 若 $\alpha\perp\beta$，$m\subset\alpha$，$n\subset\beta$，则 $m\perp n$

C. 若 $\alpha\cap\beta=l$，$m\parallel\alpha$，$m\parallel\beta$，则 $m\parallel l$　　D. 若 $\alpha\cap\beta=l$，$m\subset\alpha$，$m\perp l$，则 $m\perp\beta$

6. 数学中有许多形状优美，寓意美好的曲线，心形曲线 C：$x^2+y^2=|x|y+1$ 就是其中之一，则下列结论中正确的是（　）

A. 曲线 C 关于 y 轴对称

B. 曲线 C 恰好经过6个整点（即横、纵坐标均为整数的点）

C. 曲线 C 上存在到原点的距离超过 $\sqrt{2}$ 的点

D. 曲线 C 所围成的区域的面积大于3

三、填空题：

7. 若数列 $\{a_n\}$ 对任意正整数 n，有 $a_{n+m}=a_nq$（其中 $m\in\mathrm{N}^*$，q 为常数，$q\neq0$ 且 $q\neq1$），则称数列 $\{a_n\}$ 是以 m 为周期，以 q 为周期公比的类周期性等比数列．已知类周期性等比数列 $\{b_n\}$ 的前4项为1，1，2，3，周期为4，周期公比为3，则数列 $\{b_n\}$ 前21项的和为__________.

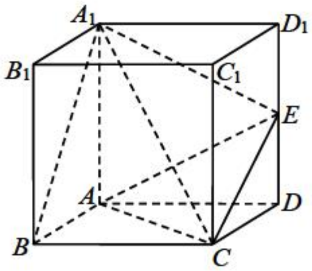
8. 已知球的直径 $AB=4$，C，D 是球面上的两点，且 $CD=2$，若 $\angle ABC=\angle ABD$，则三棱锥 $A-BCD$ 的体积的最大值是____________.

四、解答题：

9. 如图，已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为2，E 是 DD_1 的中点．设平面 ABB_1A_1 与平面 A_1CE 的交线为 l.

(1) 求证：l // 平面 ACE；

(2) 求二面角 $B-CA_1-E$ 的大小.



10. 已知函数 $f(x)=\ln x-\frac{a}{2}(x^2-1)+\frac{1}{x}(a\in\mathrm{R})$.

(1) 当 $a=-1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 的过原点的切线方程；

(2) 当 $x>1$ 时，$f(x)<\frac{1}{\mathrm{e}^{x-1}}$，求 a 的取值范围.

江苏省仪征中学2021届高三数学考前保温训练（2）
答案及评分标准

一、选择题：

1．C　2. D　3. B　4. A

二、选择题：

5. AC　6. ABD

三、填空题：

7. 1090　8. $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

四、解答题：

9．(1) 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，平面 CDD_1C_1 // 平面 ABB_1A_1，

又因为平面 $ABB_1A_1\cap$ 平面 $A_1CE=l$，平面 $CDD_1C_1\cap$ 平面 $A_1CE=CE$，

所以 l // CE，……………………………………………………………………2 分

又因为 $l\not\subset$ 平面 ACE，$CE\subset$ 平面 ACE，所以 l // 平面 ACE． ………………4 分

(2) 以 A 为坐标原点，分别以 AB，AD，AA_1 所在直线为 x 轴、y 轴、z 轴，建立空间直角坐标系，则 $A(0,0,0)$，$B(2,0,0)$，$C(2,2,0)$，$A_1(0,0,2)$，$D(0,2,0)$，$E(0,2,1)$．

设平面 BCA_1 的法向量为 $n_1=(x_1,y_1,z_1)$，由已知得，$\overrightarrow{A_1B}=(2,0,-2)$，$\overrightarrow{A_1C}=(2,2,-2)$，

由 $\begin{cases}n_1\cdot\overrightarrow{A_1B}=0,\\ n_1\cdot\overrightarrow{A_1C}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}2x_1-2z_1=0,\\ 2x_1+2y_1-2z_1=0.\end{cases}$

不妨取 $x_1=1$，则 $y_1=0$，$z_1=1$，从而平面 BCA_1 的一个法向量为 $n_1=(1,0,1)$． …………6 分

设平面 A_1CE 的法向量为 $n_2=(x_2,y_2,z_2)$，$\overrightarrow{CE}=(-2,0,1)$，

由 $\begin{cases}n_2\cdot\overrightarrow{A_1C}=0,\\ n_2\cdot\overrightarrow{CE}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}-2x_2+z_2=0,\\ 2x_2+2y_2-2z_2=0.\end{cases}$

不妨取 $z_2=1$，则 $x_2=\dfrac{1}{2}$，$y_2=\dfrac{1}{2}$，所以平面 A_1CE 的一个法向量为 $n_2=(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},1)$． ………………8 分

则 $\cos<n_1,n_2>=\dfrac{n_1\cdot n_2}{|n_1||n_2|}=\dfrac{\frac{1}{2}+1}{\sqrt{2}\times\sqrt{\frac{3}{2}}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

又因为 $<n_1,n_2>\in[0,\pi]$，所以 $<n_1,n_2>=\dfrac{\pi}{6}$，……………………………………10 分

由图形可知，二面角 $B-CA_1-E$ 的大小为 $\dfrac{5\pi}{6}$． …………………………………12 分

10．(1) 当 $a=-1$ 时，$f(x)=\ln x+\dfrac{1}{2}(x^2-1)+\dfrac{1}{x}$，$f'(x)=x+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x^3+x-1}{x^2}$，

设切点为 $(x_0,f(x_0))$，则切线方程为 $y=\dfrac{x_0^3+x_0-1}{x_0^2}(x-x_0)+f(x_0)$，

代入原点坐标，得 $0=\dfrac{x_0^3+x_0-1}{x_0^2}(-x_0)+\ln x_0+\dfrac{1}{2}(x_0^2-1)+\dfrac{1}{x_0}$，

即 $\ln x_0+\dfrac{2}{x_0}-\dfrac{1}{2}x_0^2-\dfrac{3}{2}=0$． ………………………………………………3 分

令 $g(x)=\ln x+\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{3}{2}$，$x>0$，$g'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}-x=\dfrac{-x^3+x-2}{x^2}<0$，

所以 $g(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的减函数，又 $g(1)=0$，

所以方程 $\ln x_0+\dfrac{2}{x_0}-\dfrac{1}{2}x_0^2-\dfrac{3}{2}=0$ 有唯一根 $x_0=1$，

因此曲线 $y=f(x)$ 的过原点的切线方程为 $y=x$． ……………………………5 分

(2) 设 $u(x)=e^{x-1}-x$，$x\in(1,+\infty)$，则 $u'(x)=e^{x-1}-1>0$，

所以 $u(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增，所以 $u(x)>u(1)=0$，

令 $h(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^{x-1}}=\dfrac{e^{x-1}-x}{xe^{x-1}}$，$x\in(1,+\infty)$，则 $h(x)>0$． …………………7 分

令 $\varphi(x)=\dfrac{a}{2}(x^2-1)-\ln x$，$x\in(1,+\infty)$，则 $\varphi'(x)=ax-\dfrac{1}{x}=\dfrac{ax^2-1}{x}$，

①当 $a\leqslant 0$ 时，$\varphi'(x)<0$,所以 $\varphi(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递减，所以 $\varphi(x)<\varphi(1)=0$，

此时，$\frac{1}{x}-\frac{1}{e^{x-1}}>0>\frac{a}{2}(x^2-1)-\ln x$,不符合题意；……………………8 分

②当 $0<a<1$ 时，$\varphi(x)$ 在 $(1,\sqrt{\frac{1}{a}})$ 上单调减，在 $(\sqrt{\frac{1}{a}},+\infty)$ 上单调增，

所以在区间 $(1,\sqrt{\frac{1}{a}})$ 上有 $\varphi(x)<\varphi(1)=0$,不符合题意；……………………9 分

③当 $a\geqslant 1$ 时，设 $F(x)=\frac{a}{2}(x^2-1)-\ln x-\frac{1}{x}+\frac{1}{e^{x-1}}$,由 $h(x)>0$ 可知，$-\frac{1}{e^{x-1}}>-\frac{1}{x}$，

所以 $F'(x)=ax-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{e^{x-1}}>x-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}=\frac{(x-1)(x^2+x-1)}{x^2}>0$，

所以 $F(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

又 $F(1)=0$,所以 $x>1$ 时，$F(x)>0$,即 $f(x)<\frac{1}{e^{x-1}}$.

故 a 的取值范围为 $[1,+\infty)$. ……………………………………………………12 分