班级__________学号__________姓名_________得分_________

仪征中学 2019 年高考数学全真模拟卷八

一、填空题：本大题共 14 小题，每小题 5 分，共 70 分. 把答案填在题中横线上

1．已知集合 $A=\{x|x>0\}$，$B=\{-1,0,1,2\}$，则 $A\cap B$ 等于________.

2．若复数 z 满足 $iz=2+4i$，则在复平面内 z 对应的点的坐标是_____.

3.函数 $y=\sqrt{x+1}+\dfrac{1}{2-x}$的定义域为_________________.

4. 函数 $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x\left(x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\right)$的单调递增区间是________.

5. 已知关于 x 的方程 $\dfrac{|x|}{x-2}=kx$ 有三个不同的实数解，则实数 k 的取值范围是______

6. 若实数 a，b 满足 $a=\sqrt{4a-b}+2\sqrt{b}$，则 a 的最大值是__________.

7. 已知定义在 D 上的一次函数$f(x)=(a^2+1)x+4a$，其中$a\in$ R，且$f(x)>0$恒成立，则 x 的取值范围为_______.

8. 椭圆 M：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的两个顶点 A(a，0)，B(0，b)，过 A，B 分别作 AB 的垂线交椭圆 M 于 D，C（不同于顶点），若 BC＝3AD，则椭圆 M 的离心率 e＝_______.

9.等差数列$\{a_n\}$的公差$\mathrm{d}>0$，记其前 n 项和为S_n，若对于任意满足$\mathrm{T}+\mathrm{K}=19$的 T、K，恒有$\mathrm{S_T}=\mathrm{S_K}$成立.则满足$a_n-S_n\geq 0$的解的个数是_____.

10.在平面四边形 ABCD 中，已知 $\angle A=\dfrac{\pi}{2}$，$\angle B=\dfrac{2\pi}{3}$，AB=6，在 AB 边上取点 E 使得 BE=1，连接 EC，ED，若$\angle CED=\dfrac{2\pi}{3}$，$EC=\sqrt{7}$. 则 CD＝________.

11. 已知定义在正实数集上函数 $f(x)$，满足 $f'(x)<\dfrac{f(x)}{x}$，对于 $\forall x_1,x_2\in(0,+\infty)$，都有 $f(x_1)+f(x_2)$ __________ $f(x_1+x_2)$.(填大于，小于，等于)

12.已知$a>0$，$b>0$，且$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$=1，则$3a+2\mathrm{b}+\dfrac{b}{a}$的最小值等于______.

13. 已知圆 C：$(x-1)^2+y^2=4$，不经过点 C 的直线l：$y=kx+1$与圆 C 相交于 A,B 二点，求△ABC 的内切圆的面积最小值为______.

14.萨克·牛顿（1643 年 1 月 4 日----1727 年 3 月 31 日）英国皇家学会会长，英国著名物理学家，同时在数学上也有许多杰出贡献，牛顿用“作切线”的方法求函数 $f(x)$ 零点时给出一个数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$，我们把该数列称为牛顿数列.如果函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a>0)$ 有两个零点 1，2，数列 $\{x_n\}$ 为牛顿数列，设 $a_n=\ln\dfrac{x_n-2}{x_n-1}$ 已知 $a_1=2,x_n>2$，则 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=$___________.

二、解答题：本大题共 6 小题，共 90 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.已知 ΔABC 中，$|\overrightarrow{AC}|=10$，又点 D 满足：$|\overrightarrow{AD}|=5$，$\overrightarrow{AD}=\dfrac{5}{11}\overrightarrow{DB}$，且 $\overrightarrow{CD}\bullet\overrightarrow{AB}=0$.

（1）求 $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right|$；

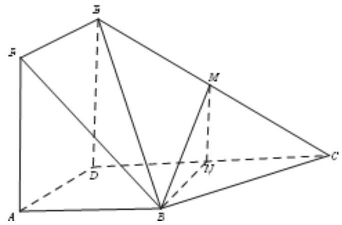
（2）设 $\angle BAC=\theta$，又 $\cos(\theta+x)=\dfrac{4}{5}$，$-\dfrac{\pi}{2}<x<0$，求 $\sin x$ 的值.

16.如图，矩形 ADEF 与梯形 ABCD 所在的平面互相垂直，$AD\perp CD$，$AB//CD$，$AB=AD=2$，$CD=4$，$ED=2\sqrt{2}$，M 为 CE 的中点，N 为 CD 中点.

(1)求证：平面 $BMN//$ 平面 ADEF；

(2)求证：平面 $BCE\perp$ 平面 BDE；

(3)求点 D 到平面 BEC 的距离.



17. 为改善居民的生活环境，政府拟将一公园进行改造扩建，已知原公园是直径为 200 米的半圆形，出入口在圆心 O 处，A 为居民小区，OA 的距离为 200 米，按照设计要求，以居民小区 A 和圆弧上点 B 为线段向半圆外作等腰直角三角形 ABC（C 为直角顶点），使改造后的公园成四边形 $OACB$，如图所示．

（1）若 $OB\perp OA$ 时，C 与出入口 O 的距离为多少米？

（2）B 设计在什么位置时，公园 $OACB$ 的面积最大？

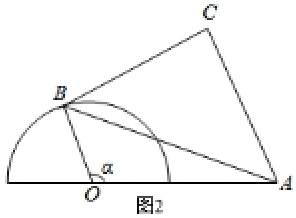


图2

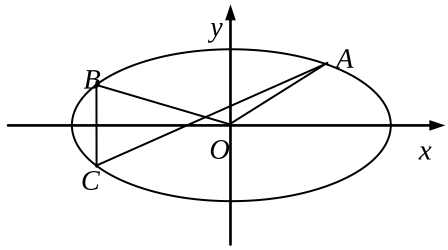
18．如图，已知椭圆 M：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，且过点 $P(2,1)$．

（1）求椭圆 M 的标准方程；

（2）设点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ 是椭圆 M 上异于顶点的任意两点，直线 OA,OB 的斜率分别为 k_1,k_2，且 $k_1k_2=-\dfrac{1}{4}$．

①求 $x_1^2+x_2^2$ 的值；

②设点 B 关于 x 轴的对称点为 C，试求直线 AC 的斜率．



第 18 题

19.各项为正的数列$\{a_n\}$满足$a_1=\frac{1}{2}, a_{n+1}=\frac{{a_n}^2}{\lambda}+a_n(n\in\mathbf{N}^*)$，

(1)当$\lambda=a_{n+1}$时，求证：数列$\left\{a_n\right\}$是等比数列，并求其公比；

(2)当$\lambda=2$时，令$b_n=\frac{1}{a_n+2}$，记数列$\{b_n\}$的前n项和为S_n，数列$\{b_n\}$的前n项之积为T_n，求证：对任意正整数n，$2^{n+1}T_n+S_n$为定值.

20. 已知函数$f(x)=\ln x+ax^2$（$a\in\mathbf{R}$），$y=f(x)$的图象连续不间断.

(1)求函数$y=f(x)$的单调区间；

(2)当$a=1$时，设l是曲线$y=f(x)$的一条切线，切点是A，且l在点A处穿过函数$y=f(x)$的图象(即动点在点A附近沿曲线$y=f(x)$运动，经过点A时，从l的一侧进入另一侧)，求切线l的方程.

班级__________学号__________姓名_________得分_________

仪征中学 2019 年高考数学全真模拟卷八

1．已知集合 $A=\{x|x>0\}$，$B=\{-1,0,1,2\}$，则 $A\cap B$ 等于________.

答案：$\{1,2\}$

解析：$A=\{x|x>0\}$，$B=\{-1,0,1,2\}$，根据集合的相关定义，则 $A\cap B=\{1,2\}$。

2．若复数 z 满足 $iz=2+4i$，则在复平面内 z 对应的点的坐标是_____.

答案：$(4,-2)$

解析：由于 $iz=2+4i$，那么 $z=4-2i$，所以在复平面内 z 对应的点的坐标是 $(4,-2)$。

3..函数 $y=\sqrt{x+1}+\dfrac{1}{2-x}$的定义域为________________．$[-1,2)\cup(2，+\infty)$

答案：$[-1,2)\cup(2，+\infty)$

解析：由题意得，函数 $y=\sqrt{x+1}+\dfrac{1}{2-x}$的定义域需满足 $x+1\geq 0$ 且 $2-x\neq 0$，

则定义域为$[-1,2)\cup(2，+\infty)$。

4..函数 $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x\left(x\in\left[0，\dfrac{\pi}{2}\right]\right)$的单调递增区间是________.

答案：$\left[0，\dfrac{\pi}{6}\right]$

解析：$y=\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$，它的单调递增区间是$-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\leq x+\dfrac{\pi}{3}\leq\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$，又因为$\left(x\in\left[0，\dfrac{\pi}{2}\right]\right)$，所以函数 $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x\left(x\in\left[0，\dfrac{\pi}{2}\right]\right)$的单调递增区间是$\left[0，\dfrac{\pi}{6}\right]$。

5..已知关于 x 的方程 $\dfrac{|x|}{x-2}=kx$ 有三个不同的实数解，则实数 k 的取值范围是______

答案：$0<k<\dfrac{1}{2}$

解析：$k=\begin{cases}\dfrac{1}{x-2},x>0\\ -\dfrac{1}{x-2},x<0\\ R,x=0\end{cases}$，画图得出 k 的取值范围。

6. 若实数 a，b 满足 $a=\sqrt{4a-b}+2\sqrt{b}$，则 a 的最大值是__________.

答案：20

解析：设 $\sqrt{b}=x(x\geq 0),\sqrt{4a-b}=y(y\geq 0)\Rightarrow b=x^2,4a-b=y^2$

$$a=\frac{x^2+y^2}{4}=2x+y\Rightarrow(x-4)^2+(y-2)^2=20(x\geq 0,y\geq 0)$$

a 表示圆 $(x-4)^2+(y-2)^2=20(x\geq 0,y\geq 0)$ 上的点到原点距离的 $\dfrac{1}{4}$。

7. 已知定义在 D 上的一次函数$f(x)=(a^2+1)x+4a$，其中$a\in R$，且$f(x)>0$恒成立，则 x 的取值范围为_______.

答案：$(2,+\infty)$

解析：原问题可化为 $f(x)=xa^2+4a+x>0$ 对 $a\in R$ 恒成立，那么有 $\begin{cases}x>0\\ \triangle=16-4x^2<0\end{cases}\Rightarrow x>2$。

8. 椭圆 M：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的两个顶点 A(a，0)，B(0，b)，过 A，B 分别作 AB 的垂线交椭圆 M 于 D，C（不同于顶点），若 BC＝3AD，则椭圆 M 的离心率 e＝_______.

答案：$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

解析：设 $D\left(x_1,y_1\right),C\left(x_2,y_2\right)$，而且 $\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{AD}\Rightarrow\left(x_2,y_2-b\right)=3\left(x_1-a,y_1\right)\Rightarrow\begin{cases}x_2-3x_1=-3a\\ y_2-3y_1=b\end{cases}$，

C，D 在椭圆上，所以有 $\begin{cases}\dfrac{9x_1^{\ 2}}{a^2}+\dfrac{9y_1^{\ 2}}{b^2}=9\\ \dfrac{x_2^{\ 2}}{a^2}+\dfrac{y_2^{\ 2}}{b^2}=1\end{cases}\Rightarrow y_1=\dfrac{3b}{a}x_1-3b,k_{AB}=-\dfrac{b}{a},k_{AD}=\dfrac{a}{b}$

点 D 在直线 AD 上，那么有 $y_1=\dfrac{a}{b}x_1-\dfrac{a^2}{b}\Rightarrow\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{3a}\Rightarrow e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

9.等差数列$\{a_n\}$的公差$d>0$，记其前 n 项和为S_n，若对于任意满足$T+K=19$的 T、K，恒有$S_T=S_K$成立.则满足$a_n-S_n\geq 0$的解的个数是_____

答案：20

解析： 根据题意得 $S_n=\dfrac{d}{2}n^2+\left(a_1-\dfrac{d}{2}\right)n$ 的对称轴为

$-\dfrac{2a_1-d}{2d}=\dfrac{19}{2}\Rightarrow a_1=-9d\Rightarrow a_n-S_n=-\dfrac{d}{2}n^2+\dfrac{21d}{2}n-10d\geq 0\rightarrow 1\leq n\leq 20$，。

10.在平面四边形 ABCD 中，已知 $\angle A=\dfrac{\pi}{2}$，$\angle B=\dfrac{2\pi}{3}$，AB=6，在 AB 边上取点 E 使得 BE=1，连接 EC，ED，

若$\angle CED$＝$\dfrac{2\pi}{3}$，EC＝$\sqrt{7}$．则 CD＝________.

答案：7

解析：画出图形，先根据余弦定理求出 BC=3，然后求出 $\cos\angle AED=\dfrac{5\sqrt{7}}{14}\Rightarrow DE=2\sqrt{7}$，再根据余弦定理求得 CD=7。

11. 已知定义在正实数集上函数 $f(x)$，满足 $f'(x)<\dfrac{f(x)}{x}$，对于 $\forall x_1,x_2\in(0,+\infty)$，都有 $f(x_1)+f(x_2)$__________$f(x_1+x_2)$.(填大于，小于，等于)

答案：大于

解析：$h(x)=\dfrac{f(x)}{x}\Rightarrow h'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}<0$，那么不妨设 $f(x)$=1代入即得。

12.已知$a>0$，$b>0$，且$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$，则$3a+2b+\frac{b}{a}$的最小值等于______.

答案：11

解析：基本不等式，$3a+2b+\frac{b}{a}$ =（$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$）（$3a+2b$）$+\frac{b}{a}=5+\frac{3b}{a}+\frac{3a}{b}\geq 5+6=11$

13. 已知圆 C：$(x-1)^2+y^2=4$,不经过点 C 的直线 l：$y=kx+1$ 与圆 C 相交于 A,B 二点，求△ ABC 的内切圆的面积最小值为_______.

答案：$(6-4\sqrt{2})\pi$

解析： 根据三角形面积相等得：$\frac{1}{2}\left(AB+AO+BO\right)r=\frac{1}{2}AB\bullet\frac{|k+1|}{\sqrt{1+k^2}}$，求出半径的表达式即可求出。

14.萨克·牛顿（1643 年 1 月 4 日----1727 年 3 月 31 日）英国皇家学会会长，英国著名物理学家，同时在数学上也有许多杰出贡献，牛顿用“作切线”的方法求函数 $f(x)$ 零点时给出一个数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$，我们把该数列称为牛顿数列.如果函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a>0)$ 有两个零点 1，2，数列 $\{x_n\}$ 为牛顿数列，设 $a_n=\ln\frac{x_n-2}{x_n-1}$ 已知 $a_1=2, x_n>2$, 则 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=$__________.

答案：$a_n=2^n$

解析： 不妨设 $f(x)=x^2-3x+2$，得到 $a_{n+1}=\ln\frac{x_{n+1}-2}{x_{n+1}-1}=2\ln\frac{x_n-2}{x_n-1}=2a_n, a_1=2\Rightarrow a_n=2^n$ 。

二、解答题：本大题共 6 小题，共 90 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.已知 ΔABC 中，$|\overrightarrow{AC}|=10$,又点 D 满足：$|\overrightarrow{AD}|=5$, $\overrightarrow{AD}=\frac{5}{11}\overrightarrow{DB}$,且 $\overrightarrow{CD}\bullet\overrightarrow{AB}=0$.

（1）求 $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right|$；

（2）设 $\angle BAC=\theta$，又 $\cos(\theta+x)=\frac{4}{5}$ ，$-\frac{\pi}{2}<x<0$，求 $\sin x$ 的值.

解析:（1）由已知 $\overrightarrow{AD}=\frac{5}{11}\overrightarrow{DB}$，即 $\overrightarrow{DB}=\frac{11}{5}\overrightarrow{AD}$，

$\because|\overrightarrow{AD}|=5,\quad\therefore|\overrightarrow{DB}|=11.\qquad\because\overrightarrow{CD}\bullet\overrightarrow{AB}=0$， $\therefore CD\perp AB$，

在 Rt△BCD 中， $BC^2=BD^2+CD^2$,

又 $CD^2=AC^2-AD^2$, $\therefore BC^2=BD^2+AC^2-AD^2=196$,

$\therefore|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BC}|=14$.

（2）在△ABC 中，$\cos\angle BAC=\frac{1}{2}$， $\therefore\theta=\frac{\pi}{3}$.

即 $\cos(\theta+x)=\cos(\frac{\pi}{3}+x)=\frac{4}{5}$， $\sin(\frac{\pi}{3}+x)=\pm\frac{3}{5}$，

而 $-\frac{\pi}{2}<x<0,\quad-\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{3}+x<\frac{\pi}{3}$， 则 $-\frac{1}{2}=\sin(-\frac{\pi}{6})<\sin(\frac{\pi}{3}+x)<\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

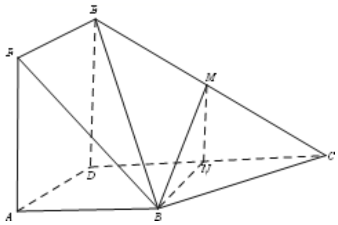
$\therefore\sin(\frac{\pi}{3}+x)=\frac{3}{5}$，$\therefore\sin x=\sin[(\frac{\pi}{3}+x)-\frac{\pi}{3}]=\frac{3-4\sqrt{3}}{10}$.

16.如图, 矩形 ADEF 与梯形 ABCD 所在的平面互相垂直, $AD\perp CD$, $AB//CD$, $AB=AD=2$, $CD=4$, $ED=2\sqrt{2}$，M 为 CE 的中点，N 为 CD 中点.

(1)求证：平面BMN//平面 ADEF;

(2)求证：平面$BCE\perp$平面 BDE;

(3)求点 D 到平面 BEC 的距离.



（1）**证明**：在ΔEDC中，M,N分别为EC,DC的中点

所以$MN//ED$，又$DE\subset$平面$ADEF$，且$MN\not\subset$平面$ADEF$所以$MN//$平面$ADEF$

因为N为CD中点，$AB//CD$，$AB=2$，$CD=4$
所以四边形$ABND$为平行四边形，所以$BN//DA$又$DA\subset$平面$ADEF$，且$BN\not\subset$平面$ADEF$
所以$BN//$平面$ADEF\because BN\cap MN=N$，$EN,MN\subset$面$BMN\therefore$平面$BMN//$平面$ADEF$
（2）**证明**：在矩形$ADEF$中，$ED\perp AD$又因为平面$ADEF\perp$平面$ABCD$，且平面$ADEF\cap$平面$ABCD=AD$
所以$ED\perp$平面$ABCD$所以$ED\perp BC$在直角梯形$ABCD$中，$AB=AD=2$，$CD=4$，可得$BC=2\sqrt{2}$
在ΔBCD中，$BD=BC=2\sqrt{2}$，$CD=4$，因为$BD^2+BC^2=CD^2$所以$BC\perp BD$
因为$BD\cap DE=D$，所以$BC\perp$平面BDE因为$BC\subset$面BCE，所以平面$BCE\perp$平面BDE
(3)设点D到平面BEC的距离为h则$V_{D-BEC}=V_{E-BCD}$，即：$\frac{1}{3}S_{\Delta BEC}\cdot h=\frac{1}{3}S_{\Delta BCD}\cdot ED$

$S_{\Delta BCD}=\frac{1}{2}\times BD\times BC=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}=4S_{\Delta BEC}=\frac{1}{2}\times EB\times BC=\frac{1}{2}\times\sqrt{8+8}\times 2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

$\therefore h=\frac{4\times 2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}=2$

17. 为改善居民的生活环境，政府拟将一公园进行改造扩建，已知原公园是直径为200米的半圆形，出入口在圆心O处，A为居民小区，OA的距离为200米，按照设计要求，以居民小区A和圆弧上点B为线段向半圆外作等腰直角三角形ABC（C为直角顶点），使改造后的公园成四边形$OACB$，如图所示.
（1）若$OB\perp OA$时，C与出入口O的距离为多少米？
（2）B设计在什么位置时，公园$OACB$的面积最大？

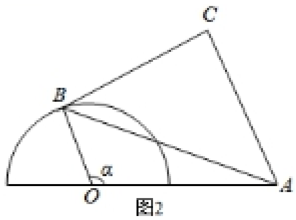


图2

解析：当$OB\perp OA$时，如图1，
作$CE\perp OB$，垂足为E，则四边形$OADE$是矩形$\therefore$ $DE=OA=200$
$\because$ 等腰直角三角形ABC，$\angle ACB=90^{\circ}$
$\therefore$ $AB=BC$，$\angle ACD+\angle BCE=\angle ACD+\angle CAE=90^{\circ}$
$\therefore$ $\angle BCE=\angle CAD\therefore$ $\triangle ACD\cong\triangle BCE\therefore$ $AD=CE$，$CD=DE$设$BE=x$，则$CD=x$
$\therefore$ $AD=OE=OB+BE=100+x$，又$AD=CE=DE-CD=200-x$
$\therefore$ $100+x=00-x$，解得$x=50\therefore$ $OC=\sqrt{2}OE=150\sqrt{2}m$.
（2）如图2设$\angle AOB=\alpha$，则$AB^2=OB^2+OA^2-2OB\times OA\times\cos\alpha=50000-40000\cos\alpha$

又$S_{\triangle ABC}\frac{1}{2}AC^2=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}AB^2=12500-10000\cos\alpha$又$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}OA\times OB\sin\alpha=\frac{1}{2}\times 200\times 100\sin\alpha=10000\sin\alpha$

$$\begin{aligned}\therefore\ S_{四边形OACB}&=S_{\Delta ABC}+S_{\Delta AOB}\\&=12500-10000\cos\alpha+10000\sin\alpha\\&=10000(\sin\alpha-\cos\alpha)+12500\\&=10000\sqrt{2}\sin(\alpha-\frac{\pi}{4})+12500\end{aligned}$$

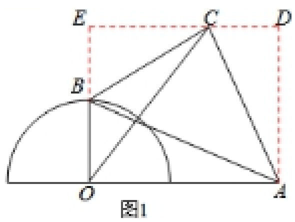
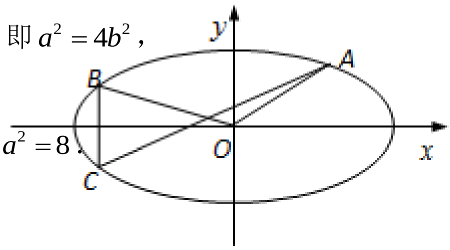


图1

$\therefore$ 当$\sin(\alpha-\frac{\pi}{4})=1$，即$\alpha=\frac{3\pi}{4}$时，四边形$OACB$面积最大为$(10000\sqrt{2}+12500)m^2$.

18．如图，已知椭圆M：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，且过点$P(2,1)$.
（1）求椭圆M的标准方程；
（2）设点$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$是椭圆M上异于顶点的任意两点，直线OA,OB的斜率分别为k_1,k_2，且$k_1k_2=-\frac{1}{4}$. ①求$x_1^2+x_2^2$的值；
②设点B关于x轴的对称点为C，试求直线AC的斜率.

解析：（1）由题意 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2}=1-\frac{b^2}{a^2}=\frac{3}{4}$，即 $a^2=4b^2$，



第 18 题

所以椭圆 M 的方程为 $x^2+4y^2=4b^2$，

又因为椭圆 M 过点 $P(2,1)$，所以 $4+4=4b^2$，即 $b^2=2,a^2=8$.

所以所求椭圆 M 的标准方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$.

（2）①设直线 OA 的方程为 $y=k_1x$，$\begin{cases}\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1,\\ y=k_1x,\end{cases}$ 化简得 $(1+4k_1^2)x^2=8$，

解得 $x_1^2=\frac{8}{1+4k_1^2}$，因为 $k_1k_2=-\frac{1}{4}$，故 $k_2=-\frac{1}{4k_1}$，

同理可得 $x_2^2=\frac{8}{1+4k_2^2}=\frac{8}{1+4\times\frac{1}{16k_1^2}}=\frac{8\times16k_1^2}{16k_1^2+4}=\frac{32k_1^2}{1+4k_1^2}$，

$\therefore x_1^2+x_2^2=\frac{32k_1^2}{1+4k_1^2}+\frac{8}{1+4k_1^2}=\frac{8(1+4k_1^2)}{1+4k_1^2}=8$.

②由题意，点 B 关于 x 轴的对称点为 C 的坐标为 $(x_2,-y_2)$，

又点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ 是椭圆 M 上异于顶点的任意两点，

$\therefore 4y_1^2=8-x_1^2,4y_2^2=8-x_2^2$，故 $4(y_1^2+y_2^2)=16-(x_1^2+x_2^2)=16-8=8$，即 $y_1^2+y_2^2=2$.

设直线 AC 的斜率为 k，则 $k=\frac{y_1+y_2}{x_1-x_2}$，因为 $k_1k_2=-\frac{1}{4}$，即 $\frac{y_1y_2}{x_1x_2}=-\frac{1}{4}$，故 $x_1x_2=-4y_1y_2$，

$\therefore k^2=\frac{y_1^2+y_2^2+2y_1y_2}{x_1^2+x_2^2-2x_1x_2}=\frac{2+2y_1y_2}{8-2x_1x_2}=\frac{2+2y_1y_2}{8+8y_1y_2}=\frac{1}{4}$，$\therefore$ 直线 AC 的斜率为 k 为常数，即 $k=\frac{1}{2}$ 或 $k=-\frac{1}{2}$.

19.各项为正的数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\frac{1}{2},a_{n+1}=\frac{a_n{}^2}{\lambda}+a_n(n\in\mathbf{N}^*)$，

(1)当 $\lambda=a_{n+1}$ 时，求证：数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，并求其公比；

(2)当 $\lambda=2$ 时，令 $b_n=\frac{1}{a_n+2}$，记数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项之积为 T_n，

求证：对任意正整数 n，$2^{n+1}T_n+S_n$ 为定值.

证明：(1)由 $\lambda=a_{n+1}$，得 $a_{n+1}=\frac{a_n{}^2}{a_{n+1}}+a_n$，所以 $a_{n+1}{}^2-a_{n+1}a_n-a_n{}^2=0$，两边同时除以 $a_n{}^2$ 可得：

$\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^2-\frac{a_{n+1}}{a_n}-1=0$，解得 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

因为 $a_n>0$，所以 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 为常数，故数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，公比为 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

(2)当 $\lambda=2$ 时，$a_{n+1}=\frac{a_n{}^2}{2}+a_n$，得 $2a_{n+1}=a_n(a_n+2)$，所以 $b_n=\frac{1}{a_n+2}=\frac{1}{2}\frac{a_n}{a_{n+1}}$.

$T_n=b_1\cdot b_2\cdots b_n=(\frac{1}{2}\frac{a_1}{a_2})(\frac{1}{2}\frac{a_2}{a_3})\cdot\cdots\cdot(\frac{1}{2}\frac{a_n}{a_{n+1}})=(\frac{1}{2})^n\frac{a_1}{a_{n+1}}=(\frac{1}{2})^{n+1}\frac{1}{a_{n+1}}$，

又$b_n=\frac{1}{2}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{a_n^{\ 2}}{2a_n\cdot a_{n+1}}=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}$；所以$S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}=2-\frac{1}{a_{n+1}}$，

故$2^{n+1}T_n+S_n=2^{n+1}\cdot(\frac{1}{2})^{n+1}\cdot\frac{1}{a_{n+1}}+2-\frac{1}{a_{n+1}}=2$为定值.

20．已知函数$f(x)=\ln x+ax^2$（$a\in\mathbf{R}$），$y=f(x)$的图象连续不间断.

(1)求函数$y=f(x)$的单调区间；

(2)当$a=1$时，设l是曲线$y=f(x)$的一条切线，切点是A，且l在点A处穿过函数$y=f(x)$的图象(即动点在点A附近沿曲线$y=f(x)$运动，经过点A时，从l的一侧进入另一侧)，求切线l的方程.

解析: (1) $f'(x)=\frac{1}{x}+2ax=\frac{2ax^2+1}{x}(x>0)$，①$a\geq 0$时，$f(x)$的单调增区间是$(0,+\infty)$；

②$a<0$时，$f(x)$的单调增区间是$(0,\sqrt{-\frac{1}{2a}})$，减区间是$(\sqrt{-\frac{1}{2a}},+\infty)$.

(2)设切点$A(x_0,f(x_0)),x_0>0$ $f'(x)=\frac{1}{x}+2x$,所以在点A处切线的斜率是$\frac{1}{x_0}+2x_0$

所以切线方程为$y-f(x_0)=(\frac{1}{x_0}+2x_0)(x-x_0)$，即$y=(\frac{1}{x_0}+2x_0)x-1-x_0^2+\ln x_0$.

l在点A处穿过函数$y=f(x)$的图象，即在点A的两侧，曲线$y=f(x)$在直线的两侧.

令$g(x)=(\frac{1}{x_0}+2x_0)x-1-x_0^2+\ln x_0$，设$h(x)=f(x)-g(x)$，所以在$x=x_0$附近两侧$h(x)$的值异号.

设$h(x)=\ln x+x^2-(\frac{1}{x_0}+2x_0)x+1+x_0^2-\ln x_0$，注意到$h(x_0)=0$．下面研究函数的单调性：

$$h'(x)=\frac{1}{x}+2x-\frac{1}{x_0}-2x_0=(x-x_0)(2-\frac{1}{x_0x})=(x-x_0)\frac{2x_0x-1}{x_0x}=\frac{2(x-x_0)(x-\frac{1}{2x_0})}{x}.$$

当$x_0<\frac{1}{2x_0}$时：

x	$(0,x_0)$	$(x_0,\frac{1}{2x_0})$	$(\frac{1}{2x_0},+\infty)$
$h'(x)$	＋	－	＋
$h(x)$	增	减	增

∴当$x\in(0,x_0),h(x)$是增函数,所以$h(x)<h(x_0)=0$，当$x\in(x_0,\frac{1}{2x_0}),h(x)$是减函数,

∴$h(x)<h(x_0)=0$，∴$h(x)$在$x=x_0$处取极大值，两侧附近同负，与题设不符.

同理，当$x_0>\frac{1}{2x_0}$时，$h(x)$在$x=x_0$处取极小值，两侧附近同正，与题设不符.

故$x_0=\frac{1}{2x_0}$,即$x_0=\frac{\sqrt{2}}{2}$时，$h'(x)=\frac{2(x-\frac{\sqrt{2}}{2})^2}{x}\geqslant 0$，∴$h(x)$在$(0,+\infty)$内单调增

∴当$x\in(0,x_0),h(x)<h(x_0)=0$，当$x\in(\frac{1}{2x_0},+\infty),h(x)>h(x_0)=0$符合题设.

∴$x_0=\frac{\sqrt{2}}{2}$，切线方程为$y=2\sqrt{2}x-\frac{1}{2}\ln 2-\frac{3}{2}$.