利用导数研究常见两类不等式问题

◇ 安徽 陈晓明

在高中阶段,引入导数概念有利于学生更深刻地理解事物动态变化的本质,有利于提高思维层次.函数的导数是研究函数性质的重要工具,其中利用导数研究两类常见不等式问题显得尤为突出.这里所说的两类常见不等式问题是不等式证明问题与不等式恒成立问题(通常与求参数取值范围问题相伴而行),它们是经久不衰的热点题型,融导数、函数的单调性、极值、最值、方程以及逻辑(量词、充要条件)等知识于一体,能全面考查学生的必备知识、关键能力与数学核心素养,具有良好的区分度,是历届高考数学全国卷以及各省市卷重点考查的问题.

例1 设函数 $f(x)=\frac{a}{x}+\ln x$.

(1)讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2)当 $0<a<\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时,若 x_1,x_2 是 $f(x)$ 的两个零点,证明:$2a<x_1+x_2$.

解析 (1)易知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,因为 $f(x)=\frac{a}{x}+\ln x$,所以 $f'(x)=\frac{x-a}{x^2}$.

当 $a\leqslant 0$ 时,$f'(x)>0$,函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增;

当 $a>0$ 时,若 $x>a$,则 $f'(x)>0$,函数 $f(x)$ 单调递增;若 $0<x<a$,则 $f'(x)<0$,函数 $f(x)$ 单调递减.

综上,当 $a\leqslant 0$ 时,函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增;当 $a>0$ 时,函数 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递减,在 $(a,+\infty)$ 上单调递增.

(2)**方法1** 构造对称差函数法

当 $0<a<\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时,由(1)知 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递减,在区间 $(a,+\infty)$ 上单调递增.如图1所示,$f(a)=1+\ln a<1+\ln\frac{1}{\mathrm{e}}=0$.因为 x_1,x_2 是 $f(x)$ 的两个零点,不妨设 $0<x_1<a<x_2$.

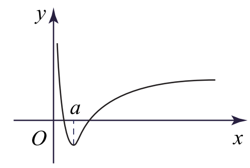

图1

令

$$g(x)=f(x)-f(2a-x)=\frac{a}{x}+\ln x-\frac{a}{2a-x}-\ln(2a-x)\ (0<x<a),$$

则 $g'(x)=-4a\left[\frac{x-a}{x(2a-x)}\right]^2<0$,即 $g'(x)<0$,所以 $g(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递减,故 $g(x)>g(a)=0$,所以 $f(2a-x)<f(x)\ (0<x<a)$.因为 $0<x_1<a$,且 $f(x_1)=f(x_2)=0$,所以 $f(2a-x_1)<f(x_1)=f(x_2)$,又因为 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上单调递增,且 $a<2a-x_1<2a$,$a<x_2$,所以 $2a-x_1<x_2$,即 $2a<x_1+x_2$.

点评 1)该小题其实就是近年来在高考和模拟考中经常出现的一大热点问题:极值点偏移问题.首先,给出极值点偏移的定义:设函数 $f(x)$ 满足 $f(x_1)=f(x_2)$,并在区间 (x_1,x_2) 内只有一个极值点 x_0.若 $x_0<\frac{x_1+x_2}{2}$,则称极值点 x_0 左偏;若 $x_0>\frac{x_1+x_2}{2}$,则称极值点 x_0 右偏.函数 $f(x)$ 的极值点左偏和右偏统称为函数 $f(x)$ 的极值点偏移.在此定义的基础上,融合数形结合的思想,可得出如下初等数学范畴内的结论:设区间 $(-\infty,+\infty)$ 内的可导函数 $f(x)$ 满足 $f(x_1)=f(x_2)$,并且只有一个极小值点 x_0.若 $f(x_1)<f(2x_0-x_2)$,则函数 $f(x)$ 极值点左偏移;若 $f(x_1)>f(2x_0-x_2)$,则函数 $f(x)$ 极值点右偏移.

2)这种构造对称差函数的策略是如何想到的呢?其实,我们可以先用分析法:要证 $2a<x_1+x_2$,只需证 $2a-x_1<x_2$,只需证 $f(2a-x_1)<f(x_2)$(因为 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上单调递增,且 $a<2a-x_1<2a$,$a<x_2$),只需证 $f(2a-x_1)<f(x_1)$(因为 $f(x_1)=f(x_2)$),只需证 $f(x_1)-f(2a-x_1)>0\ (0<x_1<a)$.于是想到构造辅助函数 $g(x)=f(x)-f(2a-x)\ (0<x<a)$,证明 $g(x)>0$ 恒成立.因此,这种策略是先从结论出发,依托原函数的图象和性质,特别是在极值点附近区域(如这里的 $(0,a)$,$(a,+\infty)$)的单调性等情况,用分析法将所证不等式转化为判断对称差函数 $g(x)=f(x)-f(2a-x)$ 的符号.该解法是极值

点偏移问题最基本的解法.在解题过程中,原函数的图象和性质会如影随形,直到成功构造对称差函数才停住脚步,并且目送一程.另外,类似的方法还有构造一元差函数 $g(x)=f(x_0+x)-f(x_0-x)$ 的策略.

方法2　增量代换法

因为 $a>0$,由(1)知 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递减,在 $(a,+\infty)$ 上单调递增.又因为 x_1,x_2 是 $f(x)$ 的两个零点,所以不妨设 $0<x_1<a<x_2$,且由零点的定义可得

$$\begin{cases}f(x_1)=\dfrac{a}{x_1}+\ln x_1=0,\\ f(x_2)=\dfrac{a}{x_2}+\ln x_2=0,\end{cases}$$

两式作差得 $\ln\dfrac{x_1}{x_2}+a\cdot\dfrac{x_2-x_1}{x_1x_2}=0$.

令 $\dfrac{x_1}{x_2}=t$,则 $t\in(0,1)$,上式转化为 $\ln t+a\cdot\dfrac{1-t}{tx_2}=0$,解得 $x_2=\dfrac{a(t-1)}{t\ln t}$.所以

$$x_1+x_2=(t+1)x_2=\frac{a(t^2-1)}{t\ln t}.$$

要证 $x_1+x_2>2a$,即证 $\dfrac{t^2-1}{t\ln t}>2$(因为 $0<a<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$).因为 $t\in(0,1)$,所以 $\ln t<0$,所以只需证 $t^2-1<2t\ln t$,即证 $t-\dfrac{1}{t}-2\ln t<0$.设 $h(t)=t-\dfrac{1}{t}-2\ln t$ $(t\in(0,1))$,则

$$h'(t)=\left(\frac{1}{t}-1\right)^2>0,$$

所以 $h(t)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增,所以 $h(t)<h(1)=0$,即 $t-\dfrac{1}{t}-2\ln t<0$,故原命题成立.

点评　这种增量代换法另辟蹊径,绕过极值点偏移,从方程切入构建新的问题独立解决,规避了函数极值点偏移对解决问题的干扰.它不需要讨论所给函数的单调性,也不需要求出参数的取值范围,而是直接列出两个方程,然后通过变形(这里是作差)得到新的方程,进一步通过增量 t 代换,将 x_1+x_2 转化为关于 t 的函数(含参数),再代入所证不等式,巧妙消参,最终构造以 t 为自变量的函数,从而运用单调性证明不等式.增量代换是解决问题的关键,根据方程形式的不同,所选的增量 t 也不同,还有可能令 $x_1-x_2=t$,$\ln\dfrac{x_2}{x_1}=t$,$\mathrm{e}^{x_2-x_1}=t$ 等.

例2　已知函数 $f(x)=ax+\dfrac{a-1}{x}$ $(a\in\mathbf{R})$.

(1)若 $f(x)-\ln x\geqslant 1$ 对任意的 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立,求实数 a 的取值范围;

(2)在(1)的条件下,若 $f(x_1)-f(x_2)=\ln x_1-\ln x_2$,证明:$x_1+x_2\geqslant 2$.

解析　(1) **方法1　分类讨论法**

令 $h(x)=f(x)-\ln x=ax+\dfrac{a-1}{x}-\ln x$,则

$$h'(x)=\frac{(ax+a-1)(x-1)}{x^2}\ (x>0).$$

当 $a=0$ 时,$h(x)=-\dfrac{1}{x}-\ln x$,对任意的 $x\in(0,+\infty)$,显然 $h(x)\geqslant 1$ 不能恒成立.

当 $a<0$ 时,$f(x)=ax+\dfrac{a-1}{x}<0$,对任意的 $x\in(0,+\infty)$,显然 $h(x)=f(x)-\ln x\geqslant 1$ 不能恒成立.

当 $a>0$ 时,有

$$h'(x)=\frac{a\left(x+1-\frac{1}{a}\right)(x-1)}{x^2}\ (x>0).$$

当 $0<\dfrac{1}{a}\leqslant 1$,即 $a\geqslant 1$ 时,$h'(x)$ 的符号由 $x-1$ 决定,易知 $h_{\min}(x)=h(1)=2a-1\geqslant 1$ 恒成立,故 $a\geqslant 1$ 合题意.

当 $\dfrac{1}{a}>1$,即 $0<a<1$ 时,令 $h'(x)=0$,则 $x=\dfrac{1}{a}-1$ 或 1.无论 $\dfrac{1}{a}-1$ 与 1 大小关系怎样,单调性如何,都有 $h(1)=2a-1<1$,故 $0<a<1$ 不合题意.

综上,实数 a 的取值范围是 $[1,+\infty)$.

方法2　分离参数法

根据题意得 $ax+\dfrac{a-1}{x}-\ln x\geqslant 1$ 对任意的 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立,所以 $a\geqslant\dfrac{x\ln x+x+1}{x^2+1}$ 对任意的 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立.令 $g(x)=\dfrac{x\ln x+x+1}{x^2+1}$,则只需求 $a\geqslant g_{\max}(x)$.引入函数 $m(x)=\ln x-x+1$,则 $m'(x)=\dfrac{1-x}{x}$.分析知,$m(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增,在 $(1,+\infty)$ 上单调递减,所以 $m_{\max}(x)=m(1)=0$,故 $\ln x\leqslant x-1$.因此

$$\frac{x\ln x+x+1}{x^2+1}\leqslant\frac{x(x-1)+x+1}{x^2+1},$$

即 $g(x)\leqslant 1$,且 $g(x)=1$,所以 $g_{\max}(x)=1$,故实数 a 的取值范围是 $[1,+\infty)$.

点评 1)由不等式恒成立求参数的取值范围是一种常见的题型,解决问题的主要方法是分类讨论法和分离参数法.通常情况下分类讨论法较为复杂,有时分类情况较多,容易漏解.相对而言分离参数法有时较为简单.通过分离参数法,将所求问题转化为函数的最值问题.但是,有时分离参数后得到的新函数(如这里的 $g(x)$)的最值并不好求,比如本题如果通过求导的方法很难直接求出 $g_{\max}(x)$,这时往往要用到放缩法(对新函数进行放缩).然而如何做到放缩有度是一个难点,有时需要多次尝试.因此,放缩法具有较大的不确定性和灵活性.另外,利用不等式 $\ln x\leqslant x-1$, $e^x\geqslant x+1$ 及其变式进行放缩是一种十分常见的做法,应引起我们的重视.

2)利用不等式 $\ln x\leqslant x-1$ 将函数 $g(x)=\dfrac{x\ln x+x+1}{x^2+1}$ 放大为函数 $\dfrac{x(x-1)+x+1}{x^2+1}$ 后,发现它正好等于常数 1,否则还需进一步求它的最大值.

(2) 由(1)知 $a\geqslant 1$.因为

$$h'(x)=\frac{(ax+a-1)(x-1)}{x^2}\ (x>0),$$

所以 $h'(x)$ 的符号由 $x-1$ 决定,故 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减,在 $(1,+\infty)$ 上单调递增,$h(x)$ 存在唯一极小值点 1.

当 $f(x_1)-f(x_2)=\ln x_1-\ln x_2$,即 $h(x_1)=h(x_2)$ 时,不妨设 $0<x_1\leqslant 1\leqslant x_2$,如图 2 所示.要证 $x_1+x_2\geqslant 2$,只需证 $x_2\geqslant 2-x_1\geqslant 1$,因为 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增,只需证 $h(2-x_1)\leqslant h(x_2)$.又因为 $h(x_1)=h(x_2)$,故只需证 $h(2-x_1)\leqslant h(x_1)$,即证

$$h(2-x_1)-h(x_1)\leqslant 0\ (0<x_1\leqslant 1).$$

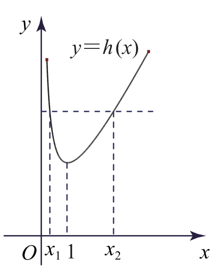

图 2

令 $\varphi(x)=h(2-x)-h(x)\ (x\in(0,1])$,则

$$\varphi(x)=2a+\frac{a-1}{2-x}-\ln(2-x)-2ax-\frac{a-1}{x}+\ln x,$$

故

$$\varphi'(x)=-2a+(a-1)\left[\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(2-x)^2}\right]+\frac{2}{x(2-x)}.$$

当 $x\in(0,1]$ 时,有

$$\frac{2}{x(2-x)}\geqslant 2,\ \frac{1}{x^2}+\frac{1}{(2-x)^2}\geqslant\frac{2}{x(2-x)}\geqslant 2.$$

又 $a-1\geqslant 0$,所以 $\varphi'(x)\geqslant -2a+2(a-1)+2=0$,当且仅当 $x=1$, $a=1$ 时,等号成立,故 $\varphi(x)$ 在 $(0,1]$ 上单调递增.又 $\varphi(1)=h(1)-h(1)=0$,所以当 $x\in(0,1]$ 时,$\varphi(x)\leqslant 0$,即 $h(2-x)\leqslant h(x)\ (x\in(0,1])$.因此 $h(2-x_1)\leqslant h(x_1)\ (0<x_1\leqslant 1)$.故原命题成立,即 $x_1+x_2\geqslant 2$.

点评 本小题也属于极值点偏移问题,与例 1 不同的是题中没有直接给出原函数,而是要以已知条件“$f(x_1)-f(x_2)=\ln x_1-\ln x_2$”为突破口,构造函数 $h(x)=f(x)-\ln x$,进一步构造对称差函数 $\varphi(x)=h(2-x)-h(x)$ 解决问题,所以这里仍然采用的是解决极值点偏移最基本的方法:构造对称差函数法.

两类常见的不等式问题具有综合性强、灵活性大、难度较大的特点,是考试中的拉分题.试题主要考查的数学思想方法有函数与方程思想、数形结合思想、分类讨论法、分离参数法、构造法、放缩法、整体代换法、分析法、消元法等.解决这两类试题有什么“绝招”吗?笔者认为解数学题的最高境界必然是“无招”.“无招”的背后,必然是寻求以不变应万变的本质.解数学题的“无招”,其实质应该是解题的通性通法.什么是解题的通性通法呢?笔者认为,通性通法就是解决一类问题最合理的想法、最基本的思路、最常用的方式、最普遍的操作程序.因此,要是有“绝招”的话,那应该是立足于课堂,抓住典型例题,让学生真正掌握解决这两类试题的通性通法.通性通法教学不仅有利于学生快速抓住数学知识的本质,形成有效解决问题的策略,而且有利于消除学生对数学学科的畏惧心理,增强学生学好数学的自信心.

(作者单位:安徽省宁国中学)