

【真题感悟】

1. (2015·福建改编)已知 $\vec{AB} \perp \vec{AC}$, $|\vec{AB}| = \frac{1}{t}$, $|\vec{AC}| = t$, 若点 P 是 $\triangle ABC$ 所在平面内一点, 且 $\vec{AP} = \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} + \frac{4\vec{AC}}{|\vec{AC}|}$, 则 $\vec{PB} \cdot \vec{PC}$ 的最大值等于_____.

2. (2016·新课标 II 改编)从区间 $[0, 1]$ 随机抽取 $2n$ 个数 $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$, 构成 n 个数对 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, 其中两数的平方和小于 1 的数对共有 m 个, 则用随机模拟的方法得到的圆周率 π 的近似值为_____.

3. (2015·湖北)函数 $f(x) = 2\sin x \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - x^2$ 的零点个数为_____.

4. (2014·安徽)设函数 $f(x) (x \in \mathbf{R})$ 满足 $f(x + \pi) = f(x) + \sin x$. 当 $0 \leq x < \pi$ 时, $f(x) = 0$, 则 $f\left(\frac{23\pi}{6}\right) =$ _____.

【考点展示】

1. 函数 $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$ 的值域为_____.

2. (2013·山东改编)设正实数 x, y, z 满足 $x^2 - 3xy + 4y^2 - z = 0$, 则当 $\frac{xy}{z}$ 取得最大值时, $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} - \frac{2}{z}$ 的最大值为_____.

3. 已知三棱锥 $S-ABC$ 的三条侧棱两两垂直, $SA=5, SB=4, SC=3, D$ 为 AB 的中点, E 为 AC 的中点, 则四棱锥 $S-BCED$ 的体积为_____.

4. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知圆 $x^2 + y^2 = 4$ 上有且只有四个点到直线 $12x - 5y + c = 0$ 的距离为 1, 则实数 c 的取值范围是_____.

5. 在区间 $(-\infty, t]$ 上存在 x , 使得不等式 $x^2 - 4x + t \leq 0$ 成立, 则实数 t 的取值范围是_____.

6. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a , 公差为 -4 , 其前 n 项和为 S_n . 若存在 $m \in \mathbf{N}^*$, 使得 $S_m = 36$, 则实数 a 的最小值为_____.

【典题导引】

例 1 已知函数 $f(x) = \log_a x + b (a > 0$ 且 $a \neq 1, b \in \mathbf{R})$ 的图象经过点 $(8, 3)$ 和 $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 若 $\forall x \in [1, 2]$, 不等式 $|f(3x+m) - f(x)| \leq 1$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

例 2 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边长分别为 a, b, c ,且满足 $a^2+c^2-b^2=\sqrt{3}ac$.

(1) 求角 B 的大小;

(2) 若 $2b\cos A=\sqrt{3}(c\cos A+a\cos C)$, BC 边上的中线 AM 的长为 $\sqrt{7}$,求 $\triangle ABC$ 的面积.

例 3 在平面直角坐标系 xOy 中,椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率 $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$,且点 $P(2,1)$ 在椭圆 C 上.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 若点 A, B 都在椭圆 C 上,且 AB 中点 M 在线段 OP (不包括端点)上.

① 求直线 AB 的斜率;

② 求 $\triangle AOB$ 面积的最大值.

例 4 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $2S_n = 4a_n + 3[(-1)^n - 1] (n \in \mathbf{N}^*)$.

(1) 证明: 数列 $\{a_n + (-1)^n\}$ 是等比数列, 并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 在数列 $\{a_n\}$ 中, 是否存在连续三项成等差数列? 若存在, 求出所有符合条件的项; 若不存在, 说明理由;

(3) 证明: 一定存在满足条件 $1 < r < s$ 的正整数 r, s , 使得 a_1, a_r, a_s 成等差数列, 并求出正整数 r, s 满足的关系.