训练 2　常见函数的导数

一、选择题

1.下列各式中正确的个数是(　　)

①$(x^7)'=7x^6$；②$(x^{-1})'=x^{-2}$；③$(\sqrt[5]{x^2})'=\dfrac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}}$；④$(\cos x)'=-\sin x$；⑤$(\cos 2)'=-\sin 2$.

A.3　B.4　C.5　D.6

答案　A

解析　∵②$(x^{-1})'=-x^{-2}$；

⑤$(\cos 2)'=0$.

∴②⑤不正确，故选 A.

2.已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^3}$，则 $f'(-3)$等于(　　)

A.81　B.243　C.-243　D.$-\dfrac{1}{27}$

答案　D

解析　因为 $f(x)=x^{-3}$，

所以 $f'(x)=-3x^{-4}=-\dfrac{3}{x^4}$，

所以 $f'(-3)=-\dfrac{3}{(-3)^4}=-\dfrac{1}{27}$.

3.已知曲线 $y=x^3$ 在点 P 处的切线斜率为 k，则当 $k=3$ 时的 P 点坐标为(　　)

A.$(-2，-8)$　　B.$(-1，-1)$或$(1，1)$

C.$(2，8)$　　D.$\left(-\dfrac{1}{2}，-\dfrac{1}{8}\right)$

答案　B

解析　$y'=3x^2$，因为 $k=3$，所以 $3x^2=3$，所以 $x=\pm1$，则 P 点坐标为$(-1，-1)$或$(1，1)$.

4.曲线 $y=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$在 $x=0$ 处的切线的倾斜角是(　　)

A.$\dfrac{\pi}{2}$　B.$\dfrac{\pi}{3}$　C.$\dfrac{\pi}{6}$　D.$\dfrac{\pi}{4}$

答案　D

解析　∵$y=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$，

∴$y'=\cos x$，当 $x=0$ 时，$\cos x=\cos 0=1$，∴$k=1$，

∴倾斜角是$\dfrac{\pi}{4}$.

5.过曲线 $y=\cos x$ 上一点 $P\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}\right)$且与曲线在点 P 处的切线垂直的直线方程为(　　)

A.$2x-\sqrt{3}y-\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}=0$

B.$\sqrt{3}x+2y-\frac{\sqrt{3}\pi}{3}-1=0$

C.$2x-\sqrt{3}y-\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}=0$

D.$\sqrt{3}x+2y-\frac{\sqrt{3}\pi}{3}+1=0$

答案　A

解析　∵$y=\cos x$，∴$y'=-\sin x$，曲线在点 $P\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}\right)$处的切线斜率是$-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，

∴过点 P 且与曲线在点 P 处的切线垂直的直线的斜率为$\frac{2}{\sqrt{3}}$，

∴所求的直线方程为 $y-\frac{1}{2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$，即 $2x-\sqrt{3}y-\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}=0$.

二、填空题

6.已知 $f(x)=x^2$，$g(x)=x^3$，则适合方程 $f'(x)+1=g'(x)$的 x 的值为________.

答案　1 或$-\frac{1}{3}$

解析　由导数公式可知，$f'(x)=2x$，$g'(x)=3x^2$，

所以 $2x+1=3x^2$，即 $3x^2-2x-1=0$.

解得 $x=1$ 或 $x=-\frac{1}{3}$.

7.曲线 $f(x)=\frac{9}{x}$在点 $M(3，3)$处的切线方程是________.

答案　$x+y-6=0$

解析　∵$f'(x)=-\frac{9}{x^2}$，

∴$f'(3)=-1$，

∴过点(3，3)的斜率为-1 的切线方程为 $y-3=-(x-3)$，即 $x+y-6=0$.

8.已知 $f(x)=\frac{1}{x}$，$g(x)=mx$，且 $g'(2)=\frac{1}{f'(2)}$，则 $m=$________.

答案　-4

解析　$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$，$g'(x)=m$.

∵$g'(2)=\frac{1}{f'(2)}$，

∴$m=-4$.

9.已知直线 $y=kx$ 是曲线 $y=\ln x$ 的切线，则 k 的值为________.

答案 $\dfrac{1}{e}$

解析 $\because(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$，设切点坐标为$(x_0，y_0)$，

则切线方程为 $y-y_0=\dfrac{1}{x_0}(x-x_0)$，

即 $y=\dfrac{1}{x_0}x+\ln x_0-1$.

由 $\ln x_0-1=0$ 知，$x_0=e$.$\therefore k=\dfrac{1}{e}$.

10.设曲线 $y=e^x$ 在点$(0，1)$处的切线与曲线 $y=\dfrac{1}{x}(x>0)$上点 P 处的切线垂直，则点 P 的坐标为________.

答案 $(1，1)$

解析 $y=e^x$ 的导数为 $y'=e^x$，曲线 $y=e^x$ 在点$(0，1)$处的切线的斜率为 $k_1=e^0=1$.

设 $P(m，n)$，$y=\dfrac{1}{x}(x>0)$的导数为 $y'=-\dfrac{1}{x^2}\ (x>0)$，

曲线 $y=\dfrac{1}{x}\ (x>0)$在点 P 处的切线的斜率为 $k_2=-\dfrac{1}{m^2}(m>0)$.

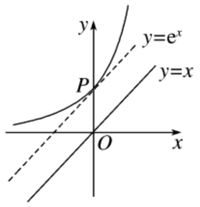
因为两切线垂直，所以 $k_1k_2=-1$，

所以 $m=1$，$n=1$，则点 P 的坐标为$(1，1)$.

三、解答题

11.点 P 是曲线 $y=e^x$ 上任意一点，求点 P 到直线 $y=x$ 的最小距离.

解 如图，当曲线 $y=e^x$ 在点 $P(x_0，y_0)$处的切线与直线 $y=x$ 平行时，点 P 到直线 $y=x$ 的距离最近.



则曲线 $y=e^x$ 在点 $P(x_0，y_0)$处的切线斜率为 1，其导数 $y'=(e^x)'=e^x$，

所以 $e^{x_0}=1$，得 $x_0=0$，

代入 $y=e^x$，得 $y_0=1$，即 $P(0，1)$.

利用点到直线的距离公式得最小距离为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.