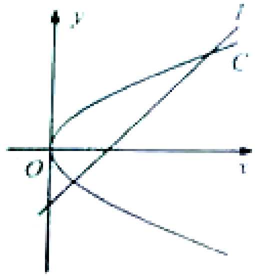
微专题　　抛物线

一课前热身

如图，在平面直角坐标系 xOy 中，已知直线 l：$x-y-2=0$，抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$.



（第22题）

（1）若直线 l 过抛物线 C 的焦点，求抛物线 C 的方程；

（2）已知抛物线 C 上存在关于直线 l 对称的相异两点 P 和 Q.

①求证：线段 PQ 的中点坐标为 $(2-p,-p)$；

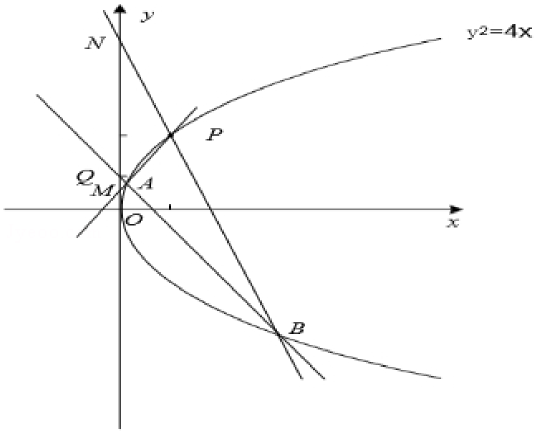
②求 p 的取值范围.

例题探究

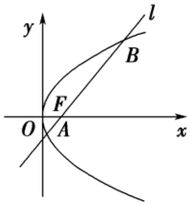
例 1 已知抛物线 C：$y^2=2px$ 经过点 P（1，2），过点 Q（0，1）的直线 l 与抛物线 C 有两个不同的交点 A，B，且直线 PA 交 y 轴于 M，直线 PB 交 y 轴于 N.

（Ⅰ）求直线 l 的斜率的取值范围；

（Ⅱ）设 O 为原点，$\overrightarrow{QM}=\lambda\overrightarrow{QO}$，$\overrightarrow{QN}=\mu\overrightarrow{QO}$，求证：$\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}$为定值.



例 2.如图所示，已知抛物线 C：$y^2=4x$ 的焦点为 F，直线 l 经过点 F 且与抛物线 C 相交于 A、B 两点.



(1)若线段 AB 的中点在直线 $y=2$ 上，求直线 l 的方程；

(2)若线段$|AB|=20$，求直线 l 的方程.

巩固训练

1.已知抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$的焦点为 F，抛物线 C 与直线 l_1：$y=-x$ 的一个交点的横坐标为 8.

(1)求抛物线 C 的方程；

(2)不过原点的直线 l_2 与 l_1 垂直，且与抛物线交于不同的两点 A，B，若线段 AB 的中点为 P，且 $|OP|=|PB|$，求△FAB 的面积.

2．抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F，过点 F 的直线交抛物线于 A，B 两点.

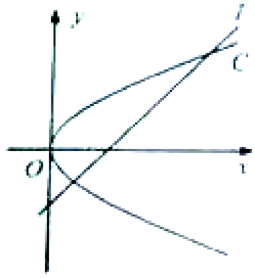
(1)若$\overrightarrow{AF}=2\ \overrightarrow{FB}$，求直线 AB 的斜率；

(2)设点 M 在线段 AB 上运动，原点 O 关于点 M 的对称点为 C，求四边形 $OACB$ 面积的最小值.

微专题　　抛物线（答案与解析）

一课前热身

如图，在平面直角坐标系 xOy 中，已知直线 l：$x-y-2=0$，抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$.



（第 22 题）

（1）若直线 l 过抛物线 C 的焦点，求抛物线 C 的方程；

（2）已知抛物线 C 上存在关于直线 l 对称的相异两点 P 和 Q.

①求证：线段 PQ 的中点坐标为 $(2-p,-p)$；

②求 p 的取值范围.

解：（1）抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 $(\frac{p}{2},0)$

由点 $(\frac{p}{2},0)$ 在直线 $l:x-y-2=0$ 上，得 $\frac{p}{2}-0-2=0$，即 $p=4$.

所以抛物线 C 的方程为 $y^2=8x$.

（2）设 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$，线段 PQ 的中点 $M(x_0,y_0)$

因为点 P 和 Q 关于直线 l 对称，所以直线 l 垂直平分线段 PQ，
于是直线 PQ 的斜率为 -1，则可设其方程为 $y=-x+b$.

①由 $\begin{cases} y^2=2px \\ y=-x+b \end{cases}$ 消去 x 得 $y^2+2py-2pb=0(*)$

因为 P 和 Q 是抛物线 C 上的相异两点，所以 $y_1\neq y_2$，

从而 $\Delta=(2p)^2-4(-2pb)>0$，化简得 $p+2b>0$.

方程（*）的两根为 $y_{1,2}=-p\pm\sqrt{p^2+2pb}$，从而 $y_0=\frac{y_1+y_2}{2}=-p$.

因为 $M(x_0,y_0)$ 在直线 l 上，所以 $x_0=2-p$.

因此，线段 PQ 的中点坐标为 $(2-p,-p)$.
②因为 $M(2-p,-p)$ 在直线 $y=-x+b$ 上
所以 $-p=-(2-p)+b$，即 $b=2-2p$.

由①知 $p+2b>0$，于是 $p+2(2-2p)>0$，所以 $p<\frac{4}{3}$.

因此 p 的取值范围为 $(0,\frac{4}{3})$.

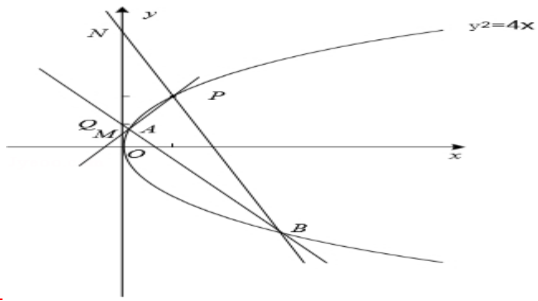
例题探究

例 1 已知抛物线 C：$y^2=2px$ 经过点 P（1，2），过点 Q（0，1）的直线 l 与抛物线 C 有两个不同的交点 A，B，且直线 PA 交 y 轴于 M，直线 PB 交 y 轴于 N.

（Ⅰ）求直线 l 的斜率的取值范围；

（Ⅱ）设 O 为原点，$\overrightarrow{QM}=\lambda\overrightarrow{QO}$，$\overrightarrow{QN}=\mu\overrightarrow{QO}$，

求证：$\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}$为定值.



【解析】：（Ⅰ）∵抛物线 C：$y^2=2px$ 经过点

P（1，2），∴4=2p，解得 p=2，

设过点（0，1）的直线方程为 y=kx+1，

设 A（x_1，y_1），B（x_2，y_2）

联立方程组可得$\begin{cases} y^2=4x \\ y=kx+1 \end{cases}$，

消 y 可得 $k^2x^2+(2k-4)x+1=0$，

∴$\Delta=(2k-4)^2-4k^2>0$，且 $k\neq0$ 解得 k

且 $k\neq0$，$x_1+x_2=-\frac{2k-4}{k^2}$，$x_1x_2=\frac{1}{k^2}$，

故直线 l 的斜率的取值范围（$-\infty$，0）∪

（Ⅱ）证明：设点 M（0，y_M），N（0，y_N），

则$\overrightarrow{QM}$=（0，y_M-1），$\overrightarrow{QO}$=（0，-1）

因为$\overrightarrow{QM}=\lambda\overrightarrow{QO}$，所以 $y_M-1=-y_M-1$，故 $\lambda=1-y_M$，同理 $\mu=1-y_N$，

直线 PA 的方程为 $y-2=\frac{2-y_1}{1-x_1}(x-1)=\frac{2-y_1}{1-\frac{y_1^2}{4}}(x-1)=\frac{4}{2+y_1}(x-1)$，

令 x=0，得 $y_M=\frac{2y_1}{2+y_1}$，同理可得 $y_N=\frac{2y_2}{2+y_2}$，

因为

$$\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}=\frac{1}{1-y_M}+\frac{1}{1-y_N}=\frac{2+y_1}{2-y_1}+\frac{2+y_2}{2-y_2}=\frac{8-2y_1y_2}{(2-y_1)(2-y_2)}=\frac{8-2(kx_1+1)(kx_2+1)}{1-k(x_1+x_2)+k^2x_1x_2}=$$

$$\frac{8-[k^2x_1x_2+k(x_1+x_2)+1]}{1--k(x_1+x_2)+k^2x_1x_2}=\frac{8-2(1+\frac{4-2k}{k}+1)}{1-\frac{4-2k}{k}+1}=\frac{4-2\times\frac{4-2k}{k}}{2-\frac{4-2k}{k}}=2,$$

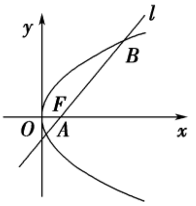
$\therefore\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}=2$，$\therefore\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}$为定值.

例 2.如图所示，已知抛物线 C：$y^2=4x$ 的焦点为 F，直线 l 经过点 F 且与抛物线 C 相交于 A、B 两点.

(1)若线段 AB 的中点在直线 $y=2$ 上，求直线 l 的方程；

(2)若线段$|AB|=20$，求直线 l 的方程.

【解析】 (1)由已知得抛物线的焦点为 $F(1,0)$．因为线段 AB 的中点在直线 $y=2$ 上，所以直线 l 的斜率存在，设直线 l 的斜率为 k，$A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，AB 的中点 $M(x_0，y_0)$，



则$\begin{cases}x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2},\\ y_0=\dfrac{y_1+y_2}{2}.\end{cases}$ 由$\begin{cases}y_1^2=4x_1,\\ y_2^2=4x_2,\end{cases}$ 得

$(y_1+y_2)(y_1-y_2)=4(x_1-x_2)$，所以 $2y_0k=4$.

又 $y_0=2$，所以 $k=1$，故直线 l 的方程是 $y=x-1$.

(2)设直线 l 的方程为 $x=my+1$，与抛物线方程联立得$\begin{cases}x=my+1,\\ y^2=4x,\end{cases}$ 消元得 $y^2-4my-4=0$，

所以 $y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-4$，$\Delta=16(m^2+1)>0$.

$|AB|=\sqrt{m^2+1}|y_1-y_2|$

$=\sqrt{m^2+1}\cdot\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$

$=\sqrt{m^2+1}\cdot\sqrt{(4m)^2-4\times(-4)}$

$=4(m^2+1)$.

所以 $4(m^2+1)=20$，解得 $m=\pm2$，

所以直线 l 的方程是 $x=\pm2y+1$，

即 $x\pm2y-1=0$.

巩固训练

1.已知抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$的焦点为 F，抛物线 C 与直线 l_1：$y=-x$ 的一个交点的横坐标为 8.

(1)求抛物线 C 的方程；

(2)不过原点的直线 l_2 与 l_1 垂直，且与抛物线交于不同的两点 A，B，若线段 AB 的中点为 P，且 $|OP|=|PB|$，求△FAB 的面积.

【解析】 (1)易知直线与抛物线的交点坐标为(8，−8)，

$\therefore(-8)^2=2p\times8$，$\therefore 2p=8$，

$\therefore$抛物线方程为 $y^2=8x$.

(2)直线 l_2 与 l_1 垂直，故可设直线 l_2：$x=y+m$，$A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，且直线 l_2 与 x 轴的交点为 M.

由$\begin{cases}y^2=8x,\\x=y+m,\end{cases}$

得 $y^2-8y-8m=0$，

$\Delta=64+32m>0$，$\therefore m>-2$.

$y_1+y_2=8$，$y_1y_2=-8m$，

$\therefore x_1x_2=\dfrac{y_1^2y_2^2}{64}=m^2$.

由题意可知 $OA\perp OB$，

即 $x_1x_2+y_1y_2=m^2-8m=0$，

$\therefore m=8$ 或 $m=0$(舍)，

$\therefore$直线 l_2：$x=y+8$，$M(8,0)$.

故 $S_{\triangle FAB}=S_{\triangle FMB}+S_{\triangle FMA}=\dfrac{1}{2}\cdot|FM|\cdot|y_1-y_2|$

$=3\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=24\sqrt{5}$.

2．抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F，过点 F 的直线交抛物线于 A，B 两点.

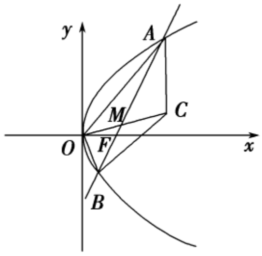
(1)若$\overrightarrow{AF}=2\ \overrightarrow{FB}$，求直线 AB 的斜率；

(2)设点 M 在线段 AB 上运动，原点 O 关于点 M 的对称点为 C，求四边形 $OACB$ 面积的最小值.

【解析】 (1)依题意知 $F(1,0)$，设直线 AB 的方程为 $x=my+1$.

将直线 AB 的方程与抛物线的方程联立，消去 x 得

$y^2-4my-4=0$.设 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，所以 $y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-4$.因为 $\overrightarrow{AF}=2\ \overrightarrow{FB}$，所以 $y_1=-2y_2$.联立上述三式，消去 y_1，y_2 得 $m=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.所以直线 AB 的斜率是 $\pm2\sqrt{2}$.



(2)由点 C 与原点 O 关于点 M 对称，得 M 是线段 OC 的中点，

从而点 O 与点 C 到直线 AB 的距离相等，

所以四边形 $OACB$ 的面积等于 $2S_{\triangle AOB}$.

因为 $2S_{\triangle AOB}=2\times\frac{1}{2}\cdot|OF|\cdot|y_1-y_2|$

$=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=4\sqrt{1+m^2}$，

所以当 $m=0$ 时，面积最小值是 4.