“以退为进”的教学关键是让学生学会“退”[①]

崔志荣

（江苏省东台市安丰中学　224221）

1　提出问题

有些数学问题，学生一看就知道“应该用什么知识解决”．如下列这个问题：设 x,y 是实数，则 $\frac{2x+\sqrt{2}y}{2x^4+4y^4+9}$ 的最大值为________．学生当然知道运用“基本不等式”求解，然而却少有学生能够准确完成．如果将这个问题退到最简单的情形，如求 $\frac{x}{2x^2+9}$ 的最大值，学生能够完成．由此，我们需要思考：对于这类问题，我们应该怎样设计教学，逐步引导学生思考解决？

2　教学分析

同一类型问题，学生只能做简单一点的题．说明学生对该类问题有所认识，但不能吃透本质．“以退为进”的教学策略是解决这个现象的好办法，从较难问题退到学生有所认识的问题中，让他们真正吃透问题的本质，从而自然而然地解决问题．“以退为进”也是重要的数学思想方法，它体现了由一般到特殊再到一般的研究思路．因此，数学教学需要培养学生“以退为进”的解题策略，以使学生遇到陌生问题不惧怕．

我国著名数学家华罗庚先生说过：“善于退，足够地退，退到最原始而不失去重要的地方，是学好数学的一个诀窍．”，这充分说明“退”在“以退为进”这种解题策略中的重要性．因此，上述那道数学问题的教学，不仅仅是解决它，要培养学生“以退为进”的解题意识，更要引导学生思考：如何“退”？

3　教学过程

基于以上分析，本文将展示上述那道题的教学过程，强调“以退为进”之“退”的教学引导，与读者交流探讨．

3.1　思想意识的建立

学生未必不能理解“以退为进”这一解题策略，但在实际解决问题中，学生思想意识薄弱，很少有学生运用这一思想方法．因此，解题教学中需要加强培养学生的思想意识，要通过长期的熏陶，让学生自觉运用这样的解题策略．

问题 1　这道题确有一定难度，为发现其解法，先请同学们学习法国著名数学家、平面直角坐标系的创始人笛卡尔研究“任意一个三角形的重心”的过程，并思考这一研究过程，笛卡尔运用了什么数学思想方法？

投影资料　任意一个三角形的重心在哪儿？笛卡尔的想法是，虽然搞不清楚“任意三角形的重心在哪里”，但可以想象把三角形的一个顶点往下压，直到把这个顶点压进另一条边内，这样三角形就变成一条线段．线段的重心在哪儿？当然在中点上．

于是，笛卡尔知道任意三角形的重心在哪儿了．一个三角形可以认为是由一根根长短不一的火柴棍摆起来的，每一根火柴棍就是一条线段，由于每根火柴棍的重心都在它的中点上，所以整堆火柴棍组成的三角形的重心就在三角形的中线上．因此笛卡尔就说，一个三角形的重心一定在一条边的中线上．同理，也在另外两条边的中线上．由于三角形的重心是唯一的，因此三角形三条中线必须交于一点（即重心）．由此，笛卡尔不仅发现了三角形的重心，还发现了定理“三角形的三条中线交于一点”．（见文[1]）

① 本文系盐城市教育科学“十三五”规划 2018 年度重点立项课题《基于高中数学基础与创新的平衡性教学研究》（编号：2018－Z－008）的阶段成果．

学生虽然知道笛卡尔所用的思想方法：一般到特殊再到一般.但他们意识不强，有必要用数学家的故事强调思想方法的重要性，熏陶他们的思想意识.这其实就是“以退为进”的解题策略.强调“退”的重要性，进一步熏陶学生的思想意识.而且这种思想方法，教师平时教学中也要经常运用，久而久之的熏陶，学生的思想意识才能真正建立.

问题2 “以退为进”是一种重要的解题策略，如何“退”很关键.我们今天研究的这道题有些复杂，请同学们先思考可以从哪些方向“退”？

如果经常运用“以退为进”的解题策略，问题2就不是问题.“退”当然是退到特殊情况，如本题可以“减元”或“降次”，还可以“简化系数”.如果是几何问题，还可以“降维”，也即上文笛卡尔的处理方法.

3.2 一“退”：减元

问题3 先从“减元”的角度“退”，这道题可以“退”到什么情况？

学生容易想到由二元转化为一元，可以去掉关于字母 y 的项，得到 $\frac{2x}{2x^4+9}$；还可以把字母 y 改为字母 x，得到 $\frac{2x+\sqrt{2}x}{2x^4+4x^4+9}=\frac{(2+\sqrt{2})x}{6x^4+9}$.但其实得到的代数式结构一样，如果求最大值，方法也一样.当然，这里没有必要让学生思考解题方法，还要继续“退”，要体现华罗庚先生的“足够地退”.

3.3 二“退”：降次

问题4 再从“降次”的角度“退”，这道题还可以“退”到什么情况？

学生很容易得到 $\frac{2x+\sqrt{2}y}{2x^2+4y^2+9}$；还有学生结合“减元”得到 $\frac{2x}{2x^2+9}$；还有个别学生得到 $\frac{2x+\sqrt{2}y}{2x+4y+9}$，甚至 $\frac{2x}{2x+9}$.这时，教师需要强调华罗庚先生的“退到最原始而不失去重要的地方”，也就是不能“退”到失去本质.可以想象，原题应该需要运用基本不等式，而“退”到 $\frac{2x+\sqrt{2}y}{2x+4y+9}$ 或 $\frac{2x}{2x+9}$，基本不等式难以运用，已经失去本质.

问题5 能求 $\frac{2x}{2x^2+9}$ 的最大值吗？并思考这个简单问题的本质.

学生都会做，求最大值只需考虑 $x>0$ 的情况，$\frac{2x}{2x^2+9}\leqslant\frac{2x}{2\sqrt{2x^2\cdot 9}}=\frac{\sqrt{2}}{6}$.虽都会做，但很少有学生能说出所以然.应多给学生一点时间，让学生充分讨论这一看似简单而内涵深刻的解法.最终要总结得到，运用基本不等式可以将二项式转化为单项式，并且还有降次功能，二次式与常数项的和，运用基本不等式可转化为一次单项式，正好约为常数(即最大值).

问题6 能求 $\frac{2x}{2x^4+9}$ 的最大值吗？

有些学生不假思索，得到 $\frac{2x}{2x^4+9}\leqslant\frac{2x}{2\sqrt{2x^4\cdot 9}}=\frac{1}{3\sqrt{2}x}$，而无法求最大值；随后有学生想到要将常数项一分为二，运用基本不等式先将四次式转化为二次式，再将二项式转化为单项式.这时教师追问，两次运用基本不等式，取等条件要一致才能求出最大值，怎样拆分常数，才能使得取等条件一致呢？应该有不少学生能够想到用待定系数法分拆.由此得到下列处理：

由 $\frac{2x}{2x^4+9}=\frac{2x}{2x^4+m+9-m}$

$\leqslant\frac{2x}{2\sqrt{2x^4\cdot m}+9-m}=\frac{2x}{2\sqrt{2m}x^2+9-m}$（当且仅当 $2x^4=m$，即 $x^4=\frac{m}{2}$ 时取等），

又 $\frac{2x}{2\sqrt{2m}x^2+9-m}\leqslant\frac{2x}{2\sqrt{2\sqrt{2m}x^2\cdot(9-m)}}$

（当且仅当 $2\sqrt{2m}x^2=9-m$，即 $x^2=\frac{9-m}{2\sqrt{2m}}$ 时取等），

所以 $\left(\frac{9-m}{2\sqrt{2m}}\right)^2=\frac{m}{2}$，解得 $m=3$（舍负），

于是 $\frac{2x}{2x^4+9}\leqslant\frac{2x}{2\sqrt{2\sqrt{6}x^2\cdot 6}}=\frac{1}{2\sqrt{3\sqrt{6}}}$，

当且仅当 $m=3$ 时取最大值 $\frac{1}{2\sqrt{3\sqrt{6}}}$.

3.4 三“退”：化系数为1

问题7 对于原题，我们已有初步认识，四次单项式与常数项的和用基本不等式可转化为二次单项式，而二次单项式与常数项的和再用基本不

等式可转化为一次单项式，由此可求最大值.同学们先试着完成，看看还会遇到什么困难.

大多数学生这么处理，$\frac{2x+\sqrt{2}y}{2x^4+4y^4+9}=\frac{2x+\sqrt{2}y}{(2x^4+m)+(4y^4+n)+9-m-n}$，……，很难求出待定系数.由此引导学生分析原因，得出是系数过于复杂的原因.

问题 8　原题的系数过于复杂，能不能从系数的角度思考，将系数"退"至简单的情况，以便用待定系数法，由取等条件容易求出待定系数?

通过观察，应该有学生能注意到 $4y^4=(\sqrt{2}y)^4$，求 $\frac{2x+\sqrt{2}y}{2x^4+(\sqrt{2}y)^4+9}$ 的最大值等价于求 $\frac{2x+y}{2x^4+y^4+9}$ 的最大值.让学生继续用待定系数处理，目的是让他们认识到简化系数的重要性，很多学生得到

$$\frac{2x+y}{2x^4+y^4+9}=\frac{2x+y}{(2x^4+m)+(y^4+n)+9-m-n}$$

后，仍无法处理.

问题 9　请同学们思考，经过两次运用基本不等式后，怎样才能得到最大值? 能不能再"退一退"系数?

分母两次运用基本不等式后，四次式转化为一次式(无常数项)，且 x，y 的系数与分子的系数对应成比例，这样得到的比值是常数，也即最大值.理清解题原理后，可能会有学生想到这样处理，$\frac{2x+y}{2x^4+y^4+9}=\frac{x+x+y}{x^4+x^4+y^4+9}$

$$=\frac{x+x+y}{(x^4+m)+(x^4+m)+(y^4+n)+9-2m-n},$$

两个关于 x 项的处理完全一致，且与 y 项的处理也一致.于是，上述待定系数 m，n 应该相等，即

$$\frac{2x+y}{2x^4+y^4+9}=\frac{x+x+y}{(x^4+m)+(x^4+m)+(y^4+m)+9-3m}.$$

从而求 $\frac{2x+y}{2x^4+y^4+9}$ 的最大值等价于求 $\frac{3x}{3x^4+9}$ 的最大值，即求 $\frac{x}{x^4+3}$ 的最大值.

已将系数退至简单情况，利用待定系数法很容易将常数分拆，甚至能直接看出.由

$$\frac{x}{x^4+3}=\frac{x}{x^4+m+3-m}\leqslant\frac{x}{2\sqrt{mx^4}+3-m}$$

$=\frac{x}{2\sqrt{m}x^2+3-m}$(当且仅当 $x^4=m$ 取等)，

又 $\frac{x}{2\sqrt{m}x^2+3-m}\leqslant\frac{x}{2\sqrt{2\sqrt{m}x^2(3-m)}}$

$=\frac{1}{2\sqrt{2\sqrt{m}(3-m)}}$(当且仅当 $2\sqrt{m}x^2=3-m$，即 $x^2=\frac{3-m}{2\sqrt{m}}$ 取等)，

所以 $\left(\frac{3-m}{2\sqrt{m}}\right)^2=m$，解得 $m=1$(舍负)，

此时 $\frac{x}{x^4+3}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{2\sqrt{m}(3-m)}}=\frac{1}{4}$.

3.5　回归本质

问题 10　以上我们通过"以退为进"的策略，已分析出 2 次运用基本不等式解决问题，且解决了待定系数法运算困难的问题，先请同学们整理一下解题过程，再回顾思考我们"以退为进"流程，以及命题者的命题流程.

学生都能整理解题过程，

由 $\frac{2x+\sqrt{2}y}{2x^4+4y^4+9}=\frac{2x+\sqrt{2}y}{2x^4+(\sqrt{2}y)^4+9}$，

所以求 $\frac{2x+\sqrt{2}y}{2x^4+4y^4+9}$ 的最大值等价于

求 $\frac{2x+y}{2x^4+y^4+9}$ 的最大值，

由 $\frac{2x+y}{2x^4+y^4+9}=\frac{2x+y}{2(x^4+1)+(y^4+1)+6}$

$\leqslant\frac{2x+y}{4x^2+2y^2+6}$(当且仅当 $x^4=y^4=1$ 取等)，

又 $\frac{2x+y}{4x^2+2y^2+6}=\frac{2x+y}{4(x^2+1)+2(y^2+1)}$

$\leqslant\frac{2x+y}{8x+4y}=\frac{1}{4}$(当且仅当 $x^2=y^2=1$ 取等)，

所以当且仅当 $x=y=1$ 时，

$\frac{2x+\sqrt{2}y}{2x^4+4y^4+9}$ 取最大值 $\frac{1}{4}$.

先要求学生回顾"以退为进"思考过程.一方面，由 $\frac{2x+\sqrt{2}y}{2x^4+4y^4+9}\Rightarrow\frac{2x}{2x^4+9}\Rightarrow\frac{2x}{2x^2+9}$，由此发现解题思路；另一方面，由 $\frac{2x+\sqrt{2}y}{2x^4+4y^4+9}\Rightarrow\frac{2x+y}{2x^4+y^4+9}\Rightarrow\frac{3x}{3x^4+9}\Rightarrow\frac{x}{x^4+3}$，(下转封底)

2020 年 5 月号问题

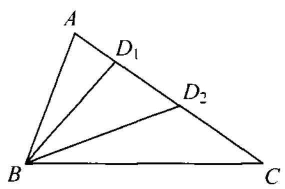
(来稿请注明出处 —— 编者)

2541 设正实数 a,b,c 满足 $a^2+b^2+c^2+abc\leqslant 4$，$x,y,z$ 为任意实数，求证：

$$ayz+bzx+cxy\leqslant x^2+y^2+z^2.$$

(陕西省咸阳师范学院基础教育课程研究中心 安振平 712000)

2542 已知 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=2\angle ACB$，点 D_1、D_2 在 AC 上，且 $\angle ABD_1=\angle CBD_2$. 求证：$\dfrac{AB^2}{AC}\geqslant\sqrt{AD_1\cdot AD_2}$.



(北京市朝阳区教育研究中心 蒋晓东 100028；北京市朝阳区芳草地国际学校富力分校 郭文征 100121)

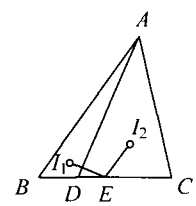
2543 在 $\triangle ABC$ 中，$\sin A=\cos B=\cot C$，求 C 的值.

(浙江省海盐县元济高级中学张艳宗 314300；北京航空航天大学图书馆 宋庆 100191)

2544 设自然数 n 是两位数，且 $n-10\left[\dfrac{n}{10}\right]=m$，$[\lg 2^n]-\left[\dfrac{30m}{7}\right]=3$，求 n（其中 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数，取 $\lg 2=0.301$）.

(河南辉县一中 贺基军 453600)

2545 如图 1，$\triangle ABC$ 中，E 是 BC 边的中点，D 是线段 BE 上一点（端点除外），设 I_1，I_2 分别为 $\triangle ABD$，$\triangle ACD$ 的内心，则 $\angle I_1EI_2=90^\circ$ 的充要条件是 $AB=AC$.



(湖北省公安县第一中学 杨先义 434300)

(上接第 53 页)

得到解题处理方法.

再要求学生反思命题者的思路. 其实将上述“以退为进”的过程倒过来，即命题思路，$\dfrac{x}{x^2+1}\Rightarrow\dfrac{x}{2(x^2+1)}\Rightarrow\dfrac{x}{x^4+3}\Rightarrow\dfrac{3x}{3x^4+9}\Rightarrow\dfrac{2x+y}{2x^4+y^4+9}\Rightarrow\dfrac{2x+\sqrt{2}y}{2x^4+4y^4+9}$，当然命题者是解题高手，并且积累了丰富的数学结论，命题过程不会完全是上述步骤，肯定具有跳跃性，尤其是前几步，他们根本不需要考虑.

4 结束语

“授人以鱼不如授人以渔”，即让学生学会运用数学思想方法解决问题，比教会学生数学知识更重要.“以退为进”是探究陌生数学问题的重要思想方法，我们应把这种重要的思想方法作为解题教学的重点. 在解题教学中，要不怕费时，引导学生学会“退”，让他们足够地“退”，通过长期的熏陶，逐步建立学生“以退为进”的思想意识，由此培养学生主动探究陌生问题的勇气和决心、培养学生能够解决较难问题的能力.

参考文献

[1] 崔志荣. 倒过来思考 让思维更流畅[J]. 数学通报，2017(6)：41—44

ISSN 0583-1458

9 770583 145207 05>

刊号：ISSN 0583－1458 / CN11－2254/O1

全国各地邮局订购 代号：2－501

全年定价：120.00 元 每期定价：10.00 元