

# 如何帮助学生建立完整的函数概念

章建跃

(人民教育出版社 课程教材研究所 100081)

在“预备知识”中学习的集合语言、常用逻辑用语和不等式的相关知识及由内容所反映的数学思想和方法,为函数的一般概念和性质的学习做好了比较充分的认知准备.根据课程标准的安排,接下来的内容是必修课程的“主题二 函数”,内容包括:函数概念与性质,幂函数、指数函数、对数函数,三角函数,函数应用.正如课程标准指出的,函数是现代数学最基本的概念,是描述客观世界中变量关系和规律的最为基本的数学语言和工具,在解决实际问题中发挥重要作用.函数是贯穿高中数学课程的主线.所以,本主题在高中数学课程中的重中之重.

整体上,高中阶段函数主线的基本架构是:

函数的概念与性质——基本初等函数——函数的应用——离散函数(数列)——导数及其应用.

下面按上述基本线索展开讨论,首先讨论函数的概念和性质.

## 1 课程定位

课程标准规定的本单元核心任务是:帮助学生建立完整的函数概念,不仅把函数理解为刻画变量之间依赖关系的数学语言和工具,也把函数理解为实数集合之间的对应关系;能用代数运算和函数图象揭示函数的主要性质;在现实问题中,能利用函数构建模型,解决问题.内容包括:函数概念、函数性质、函数的形成与发展.

分析课程标准的这一表述,需要注意如下几点:

第一,“完整的函数概念”包括“变量说”和“对应关系说”.可以认为,这是认识函数概念的两个角度,但更重要的是两个抽象层次.“变量说”比较形象、直观,与“变化过程”联系紧密;“对应关系说”进一步舍弃了运动变化背景,抽象为两个实数

集元素之间的对应关系,这样就不仅可以研究一类函数的性质、函数之间的关系(例如  $y=kx+b$  中,  $k, b$  取不同的值对函数图象、变化快慢的影响等),还可以研究不同函数类的关系,对不同函数类进行运算等,从而极大地拓展了函数的研究视野,函数的应用范围也得到扩展.

第二,函数性质的研究方法,强调代数运算和函数图象的综合运用,也就是要进一步加强数形结合的方法.实际上,初中主要是通过图象直观给出函数性质的定性描述,显然这是比较“粗糙”的.高中阶段应该在图象直观的基础上加强代数运算的方法,由此得到函数性质的定量刻画.进一步地,还要在选择性必修课程中利用导数进行研究,实现对函数性质的精确刻画.

第三,本单元的学习路径是:函数的概念→函数的性质→函数的应用.另外,“函数的形成与发展”是从数学史和数学文化的角度提出学习任务,借此使学生感悟数学的思想、精神、语言、方法、观点,了解函数在人类生活、科学技术、社会发展中的作用,以及与函数相关的人文活动.

## 2 课程标准提出的内容和要求

### 2.1 函数的概念

(1)在初中用变量之间的依赖关系描述函数的基础上,用集合语言和对对应关系刻画函数,建立完整的函数概念,体会集合语言和对对应关系在刻画函数概念中的作用.了解构成函数的要素,能求简单函数的定义域.

(2)在实际情境中,会根据不同的需要选择恰当的方法(如图象法、列表法、解析法)表示函数,理解函数图象的作用.

(3)通过具体实例,了解简单的分段函数,并能简单应用.

### 2.2 函数性质

(1)借助函数图象,会用符号语言表达函数的

单调性、最大值、最小值,理解它们的作用和实际意义.

(2)结合具体函数,了解奇偶性的概念和几何意义.

(3)结合三角函数,了解周期性的概念和几何意义.

### 2.3 函数概念的形成与发展

收集函数概念的形成与发展的历史资料,撰写论文,论述函数发展的过程、重要结果、主要人物、关键事件及其对人类文明的贡献.

上述内容和要求,体现了数学概念抽象的层次性,与学生的认知水平相适应.函数是贯穿高中数学课程的一条主线,所以本单元在高中数学中有奠基地位.定义抽象、符号抽象、具体函数类型多且复杂(连续的、离散的)、相关知识的联系性增强、用更多的工具(代数运算、几何直观、导数)讨论函数性质等是高中函数学习的特点.引入具有一般性的抽象符号  $f(x)$ ,使学生能通过建立模型刻画现实问题的数量关系,并通过讨论函数的性质而认识、把握和解释它的变化规律,这是学习函数的重要意义所在.本单元有利于学生的数学抽象、直观想象、数学运算和数学建模等素养的发展.

### 3 核心内容的理解与教学思考

本单元要在初中的基础上,引导学生利用“变量说”对典型事例进行分析,体悟引入“对应关系说”的必要性,并通过对具体实例共性的归纳,抽象概括出函数概念;引导学生体会不同表示法的特点,能根据问题的特点选择合适的表示法表示函数;让学生学会用严谨的符号语言刻画函数的单调性、奇偶性等性质的方法,并能用函数的概念与性质解决简单的问题.

#### 3.1 本章学习的认知基础在哪里

(1)在初中学习的基础上展开新内容.初中阶段,学生已经历了“函数的一般概念——一次函数——二次函数——反比例函数”的学习过程.其中,函数的概念如下:

在一个变化过程中,如果有两个变量  $x$  与  $y$ ,并且对于  $x$  的每一个确定的值,  $y$  都有唯一确定的值与其对应,那么我们就说  $x$  是自变量,  $y$  是  $x$  的函数.如果当  $x=a$  时  $y=b$ ,那么  $b$  叫做当自变量的值为  $a$  时的函数值.

分析定义可见,它强调了“变化过程”,具有

“对应关系”的内涵,但它是“变量之间的对应”,所以这个定义不仅与具体背景结合紧密,而且变量都有单位(例如,匀速运动的变化过程,给定一个时间  $t$ ,就有唯一确定的路程  $s$  与之对应,这里  $t$  和  $s$  都有单位),从而对研究带来限制.因此,需要进一步抽象,舍弃“变化过程”、“变量”等,利用集合语言将变量与变量的对应抽象到实数集之间元素与元素的对应.这时,在初中用符号表示一类函数的基础上,进一步符号化表示一般函数就成为必然要求.例如学生熟悉了一次函数  $y=kx+b$ ,

二次函数  $y=ax^2+bx+c$ ,反比例函数  $y=\frac{k}{x}$  的

符号表示,尽管它们是抽象的符号表示,但仍然是针对具体函数类的表示,另外还有一些没有解析式而只能用图象或表格等形式表示的函数,如果没有一般性的符号表示,那么不仅会给研究带来不便,而且会使研究无法深入.所以,要进一步归纳它们的共性,并引入抽象符号“ $f:A\rightarrow B$ ”,“ $y=f(x),x\in A$ ”表示对应关系、函数.

(2)利用学生熟悉的现实问题引入新内容.现实中存在着大量蕴含函数关系的事例,它们都是有利于学生理解函数概念的素材.利用好这些素材,不仅可以使学生领悟函数概念的内涵,而且可以提高学习兴趣.教学中需要认真思考的是如何选择实例才能更有利于学生展开概念的抽象活动.一般而言,典型、简单、丰富是基本指标,人教A版中的4个实例就是从这几个角度考虑的.“典型”实例的本质特征突出,有利于学生观察与发现,教学中可以适当采用强化的办法突出有关特征;“简单”是为了避免因为背景的复杂化而导致理解困难,以利于学生把注意力集中到关键特征上;“丰富”的实例应该涵盖各种变式,以利于学生在非本质属性的变化中发现本质属性.

#### 3.2 如何设计函数概念的抽象概括活动

我们知道,概念形成和概念同化是学生获得概念的两种基本方式.学生在初中完整地学习了“变量说”,函数的本质特征是对应关系,具体实例中的对应关系一般都可以用这一“话语体系”进行刻画.“对应关系说”是刻画对应关系的另一套“话语体系”,用集合语言、对应关系并引入抽象符号表述函数概念是非常数学化的,要求学生自己想到如此刻画函数本质特征的方式难度较大.

课程标准指出,函数是描述客观世界中变量关系和规律的最为基本的数学语言和工具.根据语言和学习规律,从模仿、重复、记忆开始,在运用中加深理解,在理解的基础上强化记忆,形成技能,然后逐步走向灵活运用.对于学生而言,他们不必自己创造这些语言和工具,只要能够理解语言的涵义,领会定义的精神实质,知道工具的特点和使用方法,能够在遇到问题时用出来就可以了.当然,为了有利于理解,需要经历一定的过程,使学生体会语言和工具的构成方式、使用方法等等.

根据以上分析,人教 A 版安排了如下概念学习活动:

第一步,用“变量说”分析问题(1):

某“复兴号”高速列车加速到 350 km/h 后保持匀速运行半小时.这段时间内,列车行进的路程  $S$ (单位:km)与运行时间  $t$ (单位:h)的关系可以表示为

$$S=350t.$$

在确认  $S$  是  $t$  的函数的基础上,提出问题:

如果有人说:“根据对应关系  $y=300x$ ,这趟列车加速到 300 km/h 后,运行 1 h 就前进了 300km.”你认为这个说法正确吗?

再分析、归纳出这一说法不正确的原因是“没有关注到  $t$  的变化范围”,然后给出实数集之间对应关系的表述:

列车行进的路程  $S$  与运行时间  $t$  的对应关系是

$$S=350t. \quad \textcircled{1}$$

其中, $t$  的变化范围是数集  $A_1=\{t|0\leq t\leq 0.5\}$ , $S$  的变化范围是数集  $B_1=\{S|0\leq S\leq 175\}$ .对于数集  $A_1$  中的任一时刻  $t$ ,按照对应关系①,在数集  $B_1$  中都有唯一确定的路程  $S$  和它对应.

第二步,给出变式问题(2)~(4),其中问题(2)与问题(1)解析式相同但定义域不同(在分析过程中要求学生两者是否为同一个函数进行辨析),问题(3)是北京市某天的空气质量指数变化图(只能用图象表示),问题(4)是我国某省城镇居民恩格尔系数变化情况表(没有解析式),让学生模仿刻画问题(1)的语言进行重复叙述,从中体会函数定义中的对应关系的本质特征,以逐步熟悉这种“话语方式”.

第三步,提出问题:

上述实例(1)~实例(4)中的函数有哪些共同特征?由此你能概括出函数概念的本质特征吗?

引导学生得出共同特征:

(1)都包含两个非空数集,用  $A, B$  来表示;  
(2)都有一个对应关系;(3)尽管对应关系的表示方法不同,但它们都有如下特性:对于数集  $A$  中的任意一个数  $x$ ,按照对应关系,在数集  $B$  中都有唯一确定的数  $y$  和它对应.

接着指出:

事实上,除解析式、图象、表格外,还有其他表示对应关系的方法.为了表示方便,我们引进符号  $f$  统一表示对应关系.

第四步,给出“对应关系说”.

上述四个步骤,既使学生体会用“对应关系说”重新定义函数的必要性,又给出了用更高层次的数学语言抽象具体问题中对应关系的示范.然后,在变化的情境中引导学生用同样的语言描述相应的变量关系和规律,认识函数的内涵(主要是对应关系的特征),从而形成归纳概括概念所需要的素材.在充分的具体事例铺垫的基础上,再给出形式化的函数定义.

顺便提及,有人认为,“称  $f:A\rightarrow B$  为从集合  $A$  到集合  $B$  的一个函数”中的  $B$  本身就是一个抽象的集合,而且在函数的后续研究中,集合  $B$  再无用处,真正重要的是值域,所以这里的  $B$  应该统一规定为实数集  $\mathbf{R}$ ,即函数的定义可以改为:

设  $A$  是非空的数集,如果对于集合  $A$  中的任意一个数  $x$ ,按照某种确定的对应关系  $f:A\rightarrow\mathbf{R}$ ,都有唯一确定的实数  $f(x)$  和它对应,那么就称  $f:A\rightarrow\mathbf{R}$  为一个函数,记作

$$y=f(x), x\in A.$$

其中, $x$  叫做自变量, $x$  的取值范围  $A$  叫做函数的定义域;与  $x$  的值相对应的  $y$  值叫做函数值,函数值的集合  $\{f(x)|x\in A\}$  叫做函数的值域.

这样定义确实简单而且不失严谨,避免了无关因素的干扰,但有一点瑕疵是符号  $f:A\rightarrow\mathbf{R}$  重复出现.如何改进函数的定义,广大读者可以展开讨论.

### 3.3 如何引导学生辨析概念

根据认知心理学理论,概念辨析是获得概念的必须步骤,其目的是通过具体实例进一步理解概念关键词的涵义,明确区分类似概念,避免模棱

两可、似是而非,使新概念具有清晰性、可辨别性、可利用性.

实际上,在概念抽象环节,具体实例的选择就要注意到有利于学生认识概念的本质特征.例如,人教 A 版中的四个实例,涵盖了最常见的函数表示类型,包括解析式、图象和表格,连续的、离散的,值域  $C$  包含于集合  $B$  的等等,通过这些例子让学生感受到函数的丰富性.在给出定义后,教材通过如下几个方面引导学生进行辨析:

(1)用新知识解释一次函数、二次函数、反比例函数定义(可以让学生独立完成);

(2)回到实际去:构建问题情境,解释函数  $y=x(10-x)$  的对应关系,这是从抽象到具体的过程(实践表明,因为学生的现实经验不够丰富,所以他们根据解析式构建的实际问题情境较单一,教学时应鼓励学生举更多的例子);

(3)对应关系的结果性.通过问题:  
下列函数中哪个与函数  $y=x$  相等?  
(1) $y=(\sqrt{x})^2$ ; (2) $u=\sqrt[3]{v^3}$ ; (3) $y=\sqrt{x^2}$ ;  
(4) $m=\frac{n^2}{n}$ .

使学生理解,对于函数  $y=f(x), x\in A$  和函数  $u=g(v), v\in B$ , 如果  $A=B$  且  $\forall a\in A$ , 都有  $f(a)=g(a)$ , 那么这两个函数就是同一个函数,称它们相等.

通过这个问题的辨析,可以让学生进一步体会函数的本质是两个数集元素之间的对应关系,而用什么符号或形式表示是非本质的.数学中,“相等”是非常重要的一种关系,两个函数相等的充要条件是对应关系一致、定义域相同,这里“对应关系一致”的含义是“任意一个自变量所对应的函数值相等”.

函数概念的辨析要围绕函数三要素这个整体,要聚焦在对应关系这个核心.

有人说,定义域相同对应关系不同的两个函数也可以是相同的函数,例如:  $y=x+1, x\in\{0,1\}$  和  $y=x^2+1, x\in\{0,1\}$ . 你认为呢?

3.4 “函数的表示”有怎样的教学价值

一般而言,给出数学对象的表示方法是定义数学概念的一部分,不需要专门讨论,而且数学对象的不同表示法之间可以互相转化.但对于函数概念,因为图像法、列表法、解析法等不同表示法

各有特点,而且有的函数只能采取某种表示法(这时不同表示法之间不能转化),因此在函数概念的学习中需要专门讨论表示法,其重点是根据具体问题的需要选择恰当的表示法.

更重要的是,“函数的表示”给学生提供了一个从两个变量之间的依赖关系、两个实数集之间的对应关系、函数图象的几何直观等多个角度认识函数概念的机会,有利于学生在数学表达与抽象定义之间建立联系,全面理解  $y=f(x)$  中  $f$  的意义.所以,教学中应加强“什么例子有利于说明不同表示法特点”的思考,要通过不同表示法的分析与比较,让学生体会它们各自的特点.

例如,人教 A 版中有这样一个例子:  
某种笔记本的单价是 5 元,买  $x(x\in\{1,2,3,4,5\})$  个笔记本需要  $y$  元.试用函数的三种表示法表示函数  $y=f(x)$ .

这个例题很简单,但它具有如下功能:  
(1)解析式、表格和图象都是表示  $y=f(x)$  的方法,它们都给出了从  $A=\{1,2,3,4,5\}$  到  $B=\{5,10,15,20,25\}$  的对应关系  $f$ ,即对于  $A$  中任意一个数,由解析式、表格或图象都能确定  $B$  中唯一的数与之对应,而且这个数相等,即表示法不同但对应结果相同.

调查发现,大量学生认为图象、表格表示的对应关系不是函数,本题的学习有利于消除这一理解偏差.

(2)不同的表示法有不同的特点,解析式是精确的,图象是直观的,表格是直接的.课程标准强调“理解用图像表示函数的特点”,其意图就是加强函数的直观性,这在讨论函数性质时非常有效.

为了更好地分析和解决问题,有时需要进行不同表示法的转化和综合使用.例如,教材中有如下例题:

下表是某校高一(1)班三名同学在高一学年六次数学测试的成绩及班级平均分表.

| 姓名    | 测试成绩 | 第 1 次 | 第 2 次 | 第 3 次 | 第 4 次 | 第 5 次 | 第 6 次 |
|-------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|       | 序号   |       |       |       |       |       |       |
| 王 伟   |      | 98    | 87    | 91    | 92    | 88    | 95    |
| 张 城   |      | 90    | 76    | 88    | 75    | 86    | 80    |
| 赵 磊   |      | 68    | 65    | 73    | 72    | 75    | 82    |
| 班级平均分 |      | 88.2  | 78.3  | 85.4  | 80.3  | 75.7  | 82.6  |

请你对这三位同学在高一学年的数学学习情况做一个分析.

这里,用表格给出了三名学生的成绩和班级平均分,其实是四个函数,为了分析三名学生的学习情况,转化为图像表示更有利.

### 3.5 如何使学生掌握研究函数性质的方法

建立客观世界中运动变化现象的函数模型,目的是要用数学知识和方法分析函数模型的状态,由此发现事物的变化规律,进而精确地“预测未来”.高中阶段学习的基本初等函数是现实世界中均匀变化、匀加速变化、指数增长、对数增长、周期性变化等最为基本而典型的运动变化现象的数学抽象,大量复杂的变化现象其实都是这些现象的复合与综合,这些函数模型的性质反映了现实世界中大量事物的变化规律,具有典型性、普遍性、一般性,所以探索和掌握基本初等函数的性质,无论对研究现实事物的变化规律还是对进一步研究更为复杂的函数等,都具有奠基性作用,是非常重要的.高中阶段要研究的函数性质有:单调性、最大(小)值、奇偶性、周期性、函数的零点、正增长或负增长、增长率或衰减率等.其中,单调性是最重要的性质.在进入基本初等函数研究之前,要让学生了解函数性质的大致研究架构,要在用日常语言描述函数性质的基础上,学会用符号语言表达函数性质.

#### (1) 关于函数性质的内容、结构和研究方法

这里首先要解决:为什么要研究函数的性质?什么叫“函数的性质”?函数的性质主要有哪些?如何发现函数的性质等问题.

教学时可以通过具体例子,向学生说明如下几点:

①通过研究函数的变化规律可以把握客观世界中事物的变化规律;

②函数的性质,主要是函数值随自变量的变化而变化的规律,“变化中的不变性、规律性就是性质”,如随着自变量的增大函数值是增大还是减小(变化趋势),有没有最大值或最小值(特殊意义的取值),函数图象有什么特征(主要是对称性),有没有其他特殊取值(如函数零点)等;

③研究方法,数形结合是主要方法,如果能画出函数图象,那么通过观察和分析图象的特征,可以得到函数的一些性质;也可以利于代数的知识,

通过对解析式的某些特征的分析得出一些性质,

例如观察反比例函数  $y = \frac{k}{x}, k > 0$  的解析式,由分式的性质就可以得到

$x \neq 0, y \neq 0$ ,说明图象与坐标轴没有交点;

$xy = k > 0$ ,说明图象在第一、三象限;

由  $k > 0$  且为定值可知,当  $x > 0$  时,随着  $x$  增大,  $y$  减小,图象会越来越贴近  $x$  轴但不会与  $x$  轴相交,……;

如果点  $(x, y)$  在图象上,即  $y = \frac{k}{x}$ ,那么

$-y = \frac{k}{-x}$ ,说明点  $(-x, -y)$  也在图象上,所以

图象关于原点成中心对称;同时有  $x = \frac{k}{y}$ ,说明点  $(y, x)$  也在图象上,所以图象关于直线  $y = x$  成轴对称;等等.

需要注意的是,学生(甚至有些教师)比较习惯于“观察图象,得出性质”,所以教学中要有意识地渗透从代数角度研究函数性质的方法.在积累了一定知识后,还要让学生形成“由性质画图象”的观念(实际上,人教 A 版在指数函数与对数函数、三角函数以及后面的导数中都有这样的要求).

#### (2) 函数的单调性

函数的单调性是老师们特别关注的内容,可以有不同的处理方法.一段时间以来,大家都采用“例-规”法教学,希望通过适当的问题引领,使学生自主发现单调性的刻画方法,特别是试图把“函数值随自变量的增大而增大(减小)”转化为定量的不等式语言刻画,以及为什么要“ $\forall x_1, x_2 \in D$ ”这两个难点解决在给出判断规则之前,但实践表明,教学效果并不理想.究其原因,一是单调性判断规则本身的抽象性;二是定量化方法的构造性,学生在此之前没有学过类似的方法,他们的认知准备不充分;第三,和“对应关系说”类似,这也是语言的学习,学生是否能自主探索出表达单调性的符号语言并不是重点,重要的是要让学生学会符号语言的表达方式,理解如此表达是严谨的、简洁的.所以,人教 A 版采用了“规-例”法,具体步骤如下:

第一步,以  $f(x) = x^2$  为载体,叙述用符号

语言表达单调性的方法:

图象在  $y$  轴左侧部分从左到右是下降的,也就是说,当  $x < 0$  时,  $f(x)$  随  $x$  的增大而减小. 用符号语言表达,就是任意取  $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$ , 得到  $f(x_1) = x_1^2, f(x_2) = x_2^2$ , 那么当  $x_1 < x_2$  时, 有  $f(x_1) > f(x_2)$ . 这时我们就说函数  $f(x) = x^2$  在  $(-\infty, 0]$  上是单调递减的.

这里实际上是数学语言的转换,从“从左到右下降”,到“ $x < 0$  时,  $f(x)$  随  $x$  的增大而减小”,再到“用符号语言表达”. 其中,符号语言是严格的数学语言,也是难点,所以教科书采取了直接示范的方法.

第二步,通过用符号语言表达  $f(x) = x^2$ , 在  $(0, +\infty)$  上单调递增,以及“思考”栏目:

函数  $f(x) = |x|, f(x) = -x^2$  各有怎样的单调性?

使学生熟悉符号语言的表述方法(教学时要让学生模仿第一步的叙述完整写出单调递增的符号语言表达);

第三步,给出严格的数学表达,包括符号语言表达和图示;

第四步,通过“思考”栏目:

设  $A$  是区间  $D$  上某些自变量的值组成的集合,而且  $\forall x_1, x_2 \in A$ , 当  $x_1 < x_2$  时, 都有  $f(x_1) < f(x_2)$ , 我们能说函数  $f(x)$  在区间  $D$  上单调递增吗? 你能举例说明吗?

引导学生进行辨析,从而理解规则中“ $\forall x_1, x_2 \in D$ ”的必要性.

第五步,用新规则证明一次函数、给定区间上的反比例函数、函数  $y = x + \frac{1}{x}$  的单调性等等.

函数单调性是数学的判断规则,但它也有概念的属性,所以上述内容的处理,体现了概念同化与概念形成相融合的方式,并且加强了符号语言表达方式的引导.

### (3) 函数的奇偶性

单调性是函数的“局部性质”,奇偶性是函数的整体性质;单调性是针对所有函数来讨论的,奇偶性是某些函数的特殊性质.

通过单调性的学习,学生已经了解研究函数性质的主要任务,即利用符号语言对函数的变化规律做出严谨表达,在此过程中理解它们的作用,

能用于刻画实际问题中的变化规律. 单调性刻画了在某一区间上,当自变量增大时函数值的变化趋势;奇偶性则是刻画了函数的对称性,把图象的对称性(几何特性)转化为代数关系,并用严格的符号语言表达,沟通了形与数,实现了从定性到定量的转化. 偶函数的图象是轴对称图形,而且对称轴是固定的—— $y$  轴,偶函数的判断规则就是利用  $y = f(x)$  表达“图象是轴对称图形,对称轴是  $y$  轴”;类似的,奇函数的判断规则就是利用  $y = f(x)$  表达“图象是中心对称图形,对称中心是原点”. 如果知道一个函数具有奇偶性,那么就可以通过研究  $x > 0$  (或  $x < 0$ ) 的情况而得到整体的情况.

因为奇偶性的几何特征和代数特征都比较明显,学生比较容易从具体实例中进行归纳,所以教材按如下步骤展开内容:

第一步,画出函数  $f(x) = x^2$  和  $g(x) = 2 - |x|$  的图象,要求学生观察图象,并说出这两个函数图象的共同特征.

第二步,安排“探究”栏目

类比函数单调性,你能用符号语言精确地描述“函数图象关于  $y$  轴对称”这一特征吗?

让学生开展自主探究活动,通过从特殊到一般的方法归纳出:

$\forall x \in \mathbf{R}$ , 都有  $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ , 这时称函数  $f(x) = x^2$  为偶函数.

然后要求学生仿照已有过程,说明函数  $f(x) = 2 - |x|$  也是偶函数.

第三步,用符号语言表示:

函数  $f(x)$  的定义域为  $I$ , 如果  $\forall x \in I$ , 都有  $-x \in I$ , 且  $f(-x) = f(x)$ , 那么函数  $f(x)$  就叫做偶函数.

顺便说明,与以往偶函数的定义稍有不同,这个定义明确了偶函数定义域的特征.

第四步,重复偶函数的研究过程,得出奇函数的定义.

因为奇函数的定义与偶函数的定义完全同构,所以教学时可以让学生自己提出问题,展开模仿性探究并给出定义.

总之,函数的基本性质的内容处理,从认知理论看,既有同化也有顺应,学生在教材的示范下进行模仿、归纳和抽象而形成性质的判断规则,并且

安排了对关键词的辨析和应用规则判断函数性质的练习,从而落实判断函数性质的操作步骤,由此为学生铺设起合适的认知台阶,能使学生经历完整的学习过程,从而保证学生对函数性质判断规则的理解水平,并对“如何研究函数性质”有所感悟.

### 3.6 关于函数概念的教学

函数概念,因为其高度的抽象性,面对的问题多样而复杂,涉及到许多代数、几何知识,而且要用数形结合的方法,因而使解决问题的思想方法具有很强的综合性,另外,也是特别重要的,函数所描述的是客观世界的变量关系和规律,所以需要学习者积累丰富的生活经验,对现实世界中相关的运动变化现象要有一定深度的了解,所有这些都是造成函数概念学习困难的因素.克服困难的方法是让学生参与到概念的建构过程中,要让学生完整地经历“具体事例——观察、实验——比较、分析——分类、综合——抽象、概括”的过程.

关于函数概念的教学已经有大量讨论,所以不做全面讨论,这里只强调认真讲好教材中四个实例的重要意义.具体的,应该以“对应关系说”为定向,通过逻辑连贯、前后一致的问题串引导学生体会概念的内涵.

首先,问题 1、2 是有解析式的,要引导学生关注自变量的取值范围.例如,根据问题 1 的背景,可以提出如下问题:

①时间  $t$  的变化范围是什么?

②你能回答“加速到 350 km/h 后,火车运行 1 小时所对应的距离是多少”吗?为什么?

③你认为如何描述才能反映列车的真实运动过程?

其次,问题 3 “空气质量指数变化图”,借助这个例子要使学生了解:第一,图象给出了对应关系;第二,自变量的范围  $A$  是精确的, $A$  中任意一个数在  $B$  中都有唯一的数与之对应;第三,函数值所在的范围  $B$  可以比较“宽松”,有的数可以没有自变量与之对应;第四,为了方便表示,需要引入新的符号.所以可以提出如下问题:

①时间  $t$  在什么范围?  $I$  是  $t$  的函数吗?为什么? AQI 的值  $I$  在什么范围?

说明:时间  $t$  的范围  $[0, 24]$  是确定的;利用“变量说”可以解释  $I$  是  $t$  的函数,因为“ $\forall t \in [0, 24]$ , 都有唯一确定的  $I$  值与之对应”是一个事实;

困难在于  $I$  的范围,学生可能会用测量的方法给出,这时教师可以追问:这样得出的范围能反映“ $\forall t \in [0, 24]$ , 都有唯一确定的  $I$  值与之对应”这个事实吗?如何改进一下?通过讨论,使学生体会让集合  $B$  包含值域并不影响对应关系的本质(这个过程有利于发展学生思维的抽象性).

顺便指出,这里要下功夫让学生理解“图象就是对应关系”,这是促进学生理解函数概念的契机.所以,不能仅以“因为任意一个时间  $t$  都有唯一一个 AQI 的值与之对应”一语带过,应让学生说明:给定一个时间  $t$ ,如何借助图象找出与之对应的 AQI 的值.这里可以利用信息技术把对应过程表达出来.

②从所给的图中能回答“11 月 24 日 8 时对应的 AQI 是多少”吗?

③这是一个函数,有解析式吗?如果让你表示出这个函数,你会怎么做?

因为所给的图象只是 11 月 23 日的 AQI 变化情况,所以不能回答 11 月 24 日的情况;这是一个函数但没有解析式,要对它作出表示,那么就非引入符号语言不可.

再次,问题 4 恩格尔系数变化表的处理,与问题 3 基本一致,其难点仍然在函数值所在的范围的确定上.根据表格,可以把恩格尔系数的变化范围列举,也可以是  $[0.2857, 0.3817]$ ,但更具一般性的是  $(0, 1]$ . 这里可以让学生通过恩格尔系数的定义( $r = \frac{\text{食物支出金额}}{\text{总支出金额}}$ )给出合理范围.实际上,数学追求简洁表达,针对每一个省份分别给  $r$  的范围不符合这个原则.

有了上述过程的详细铺垫,再让学生归纳共同特征、抽象概念就相对容易了.这里要注意让学生把 4 个对应关系放在一起以便于观察得出共性(可以用表格呈现),特别是要让学生用自己的语言说明这 4 个函数的对应关系的表示形式不同(解析式、图、表),但本质一样:对于集合  $A$  中任意一个数,在集合  $B$  中都有唯一一个数与之对应;还要让他们说明引入抽象的符号语言统一表达函数所带来的好处.

### 3.7 如何研究函数 $y = x + \frac{1}{x}$

这个函数是广大教师非常喜欢的,还给它命

名为“耐克函数”、“对勾函数”. 以往教材中, 这个函数放在导数中研究. 本次教材修订中, 征求一线教师的意见时, 大家比较一致地认为这个函数比较重要, 希望把它放在高一, 让学生早一点接触到, 而且有的老师说: “教材中放不放都不影响老师教, 一般地大家都会讲到  $y=ax+\frac{b}{x}$ .” 考虑到教学的实际, 更重要的是在“预备知识”中已经学了“基本不等式”, 所以在“幂函数”学习之后, 安排对这个函数的“研究性学习”, 还是可以考虑的. 不过, 教材不能将其拓展到  $y=ax+\frac{b}{x}$  (其中  $ab \neq 0$ ) 上去, 教学中是否拓展, 可以由教师根据学情自行决定.

这个函数的教学主要应把握好如下几点:

第一, 内容的定位上, 要注意从联系、结构、整体等观点出发, 与初中正比例函数、反比例函数和刚刚学习的幂函数联系起来, 以培养学生“利用已有知识解决新的问题”的思维习惯; 同时, 通过这个函数的研究, 让学生体会通过运算构造新函数的方法.

第二, 要在促进学生数学学科核心素养发展上加强思考, 可以通过适当的教学设计, 在研究这个函数的性质、图象的过程中, 发展直观想象、数学运算、数学建模等素养.

第三, 要认真领会人教A版的设计意图. 实际上, 教材是循着以下思路引导学生开展研究性学习的:

(1) 面对一个对象, 首先要明确需要研究的问题, 所以提出问题“你认为可以从哪些方面研究这个函数?”

(2) 研究一个函数是有基本套路的, 这是培养学生“有逻辑地思考”的过程, 所以提出问题“你认为可以按怎样的路径研究这个函数?”

(3) 根据提示, 把  $y=x+\frac{1}{x}$  看成是  $y=x$  与  $y=\frac{1}{x}$  之和, 想到利用它们的性质. 根据前面确定的路径, 先得出定义域、值域、奇偶性等.

(4) 由基本不等式可得出: 当  $x>0$  时,  $x+\frac{1}{x} \geq 2$ , 当且仅当  $x=\frac{1}{x}$ , 即  $x=1$  时取得等号; 由奇

函数的性质可得当  $x<0$  时,  $x+\frac{1}{x} \leq -2$ , 当且仅当  $x=\frac{1}{x}$ , 即  $x=-1$  时取得等号.

(5) 从解析式  $y=x+\frac{1}{x}$  可以得出, 在区间  $(0, \infty)$  上, 当  $x \rightarrow 0$  时,  $y=x+\frac{1}{x}$  的图象与  $y=\frac{1}{x}$  的图象越来越靠近; 当  $x \rightarrow \infty$  时,  $y=x+\frac{1}{x}$  的图象与  $y=x$  的图象越来越靠近. 所以,  $y$  轴和直线  $y=x$  都是函数图象的渐近线. 由此可以想象出函数图象的大致形状(如图1所示).

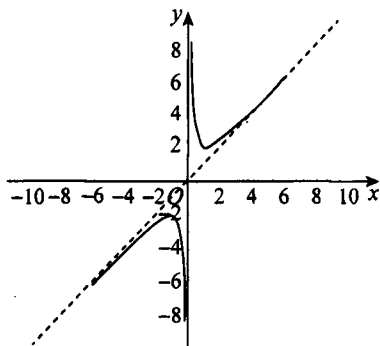


图1

#### 4 小结

比较初高中的两个函数定义, 可以发现它们的本质是一致的, 都以“对应关系”为核心, 但它们使用的语言有很大区别, 高中利用集合语言、逻辑用语, 引入抽象符号  $f:A \rightarrow B$ , 从而使函数概念的定义更加严谨, 提高了抽象层次, 使概念更具一般性. 这样的语言表达, 学生在以往的学习中很少接触到, 也是学生学习的难点. 因此, 在函数概念的教学, 要充分注意“数学语言教学”的特征, 引导学生通过具体实例, 积累用集合与对应关系的语言表达数学规律的经验, 体验引入抽象符号的必要性, 在此基础上抽象出函数的定义, 从而有效地化解难点, 把精力集中到用数学的方式表达对应关系上. 同理, 函数的表示、函数的性质等内容的学习都有数学语言学习的特征, 让学生掌握这样的“话语方式”是主要任务, 所以可以适当采用“模仿+练习”的方式, 使学生在“用数学的语言表达世界”的过程中领悟函数概念的本质.