

2019 届基地学校四月大联考

数学 I

注意事项

考生在答题前请认真阅读本注意事项及各题答题要求

1. 本试卷共 4 页, 包含填空题 (共 14 题)、解答题 (共 6 题), 满分为 160 分, 考试时间为 120 分钟。考试结束后, 请将答题卡交回。
2. 答题前, 请您务必将自己的姓名、考试证号等用书写黑色字迹的 0.5 毫米签字笔填写在答题卡上。
3. 作答试题必须用书写黑色字迹的 0.5 毫米签字笔写在答题卡上的指定位置, 在其它位置作答一律无效。如有作图需要, 可用 2B 铅笔作答, 并请加黑、加粗, 描写清楚。

参考公式:

锥体的体积公式 $V_{\text{锥体}} = \frac{1}{3}Sh$, 其中 S 为锥体的底面积, h 为高。

样本数据 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的方差 $s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$, 其中 $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ 。

一、填空题: 本大题共 14 小题, 每小题 5 分, 共计 70 分。把答案填写在答题卡相应位置。

1. 已知集合 $A = \{x | -2 < x < 3\}$, $B = \{x | x = 2n, n \in \mathbb{Z}\}$, 则 $A \cap B = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
2. 已知复数 $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 1 - i$, 其中 i 为虚数单位, 则复数 $z_1 z_2$ 的实部为 。
3. 右图是一个算法的伪代码, 若输入 x 的值为 3 时, 则输出的 y 的值为 。
4. 某同学近 5 次考试的数学附加题的得分分别为 30, 26, 32, 27, 35, 则这组数据的方差为 。
5. 设不等式 $\log_2 x < 1$ 的解集为 D , 在区间 $[-3, 5]$ 上随机取一个实数 x , 则 $x \in D$ 的概率为 。
6. 已知圆锥的底面面积为 2π , 侧面积为 $2\sqrt{3}\pi$, 则该圆锥的体积为 。
7. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $a_2 = 0$, $S_3 + S_4 = 6$, 则 $a_5 + a_6$ 的值为 。
8. 已知 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\tan 2\alpha = \frac{3}{4}$, 则 $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}$ 的值为 。

```
Read x
If x ≤ 0 Then
    y ← 2x
Else
    y ← 2x2 - x
End If
Print y
```

(第 3 题)

9. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的右焦点为 F_2 , 左顶点为 A , 过点 F_2 且垂直于 x 轴的直线与双曲线交于 P, Q 两点. 若 $AP \perp AQ$, 则双曲线的离心率为 ▲ .

10. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x-a) = x^3 + 1$, 且对任意实数 x 都有 $f(x) + f(2-x) = 2$, 则 $f(0)$ 的值为 ▲ .

11. 在梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $AB = 4$, $CD = 2$, $AD = 3$, $2\overline{DM} = \overline{MC}$, 若 $\overline{AM} \cdot \overline{BD} = 3$, 则 $\overline{AD} \cdot \overline{BC}$ 的值为 ▲ .

12. 若 $a, b \in \mathbb{R}$, 且 $a^2 + 2ab - 3b^2 = 1$, 则 $a^2 + b^2$ 的最小值为 ▲ .

13. 在平面直角坐标系 xOy 中, $\triangle ABC$ 的外接圆方程为 $x^2 + y^2 = 4$, $\angle ACB = \frac{\pi}{3}$, AB 边的中点 M 关于直线 $y = x + 2$ 的对称点为 N , 则线段 ON 长度的取值范围是 ▲ .

14. 已知函数 $f(x) = x \ln x$, $g(x) = -x^2 + (a+12)x + 2a$, 若不等式 $f(x) \leq g(x)$ 的解集中恰有两个整数, 则实数 a 的取值范围是 ▲ .

二、解答题: 本大题共 6 小题, 共计 90 分. 请在答题卡指定区域内作答. 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (本小题满分 14 分)

已知函数 $f(x) = \sin x \cos x + \sqrt{3} \sin^2 x - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

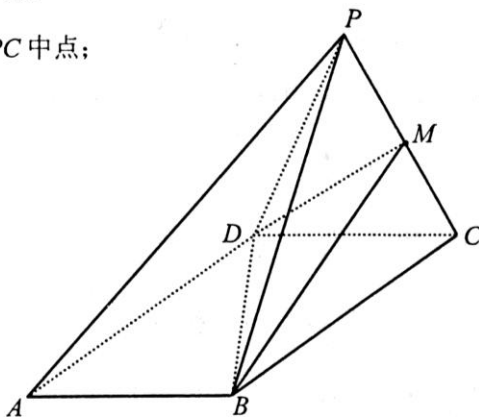
(1) 若 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 求函数 $f(x)$ 的值域;

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 C 为锐角, $f\left(\frac{C}{2}\right) = -\frac{1}{2}$, $AB = 3$, $A = \frac{\pi}{4}$, 求边 BC 的长.

16. (本小题满分 14 分)

如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 为平行四边形, $AD=2$, $AB=1$, $\angle BAD=60^\circ$, 平面 $PCD \perp$ 平面 $ABCD$, 点 M 为 PC 上一点.

- (1) 若 $PA \parallel$ 平面 MBD , 求证: 点 M 为 PC 中点;
(2) 求证: 平面 $MBD \perp$ 平面 PCD .



(第 16 题)

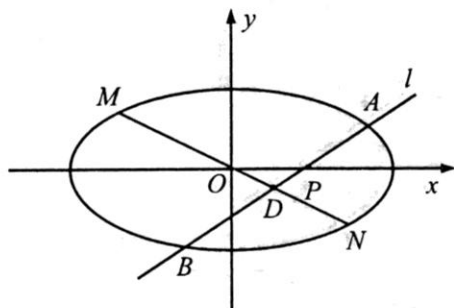
17. (本小题满分 14 分)

某公司代理销售某种品牌小商品，该产品进价为 5 元/件，销售时还需交纳品牌使用费 3 元/件，售价为 x 元/件，其中 $10 \leq x \leq 30$ ，且 $x \in \mathbf{N}^*$ ．根据市场调查，当 $10 \leq x \leq 15$ ，且 $x \in \mathbf{N}^*$ 时，每月的销售量 h （万件）与 $(18-x)^2$ 成正比；当 $15 \leq x \leq 30$ ，且 $x \in \mathbf{N}^*$ 时，每月的销售量 h （万件）与 $1 - \frac{10}{x}$ 成反比．已知售价为 15 元/件时，月销售量为 9 万件．

- (1) 求该公司的月利润 $f(x)$ (万元) 与每件产品的售价 x (元) 的函数关系式;
(2) 当每件产品的售价为多少元时, 该公司的月利润 $f(x)$ 最大? 并求出最大值.

18. (本小题满分 16 分)

如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的短轴长为 2, 椭圆 C 上的点到右焦点距离的最大值为 $2 + \sqrt{3}$. 过点 $P(m, 0)$ 作斜率为 k 的直线 l 交椭圆 C 于 A, B 两点 ($m > 0, k > 0$), D 是线段 AB 的中点, 直线 OD 交椭圆 C 于 M, N 两点.



(第 18 题)

- (1) 求椭圆 C 的标准方程;
- (2) 若 $m=1$, $\overrightarrow{OM} + 3\overrightarrow{OD} = \mathbf{0}$, 求 k 的值;
- (3) 若存在直线 l , 使得四边形 $OANB$ 为平行四边形, 求 m 的取值范围.

19. (本小题满分 16 分)

已知函数 $f(x) = \ln x - ax + 1$, $g(x) = x(e^x - x)$.

- (1) 若直线 $y = 2x$ 与函数 $f(x)$ 的图象相切, 求实数 a 的值;
- (2) 若存在 $x_1 \in (0, +\infty)$, $x_2 \in (-\infty, +\infty)$, 使 $f(x_1) = g(x_2) = 0$, 且 $x_1 - x_2 > 1$, 求实数 a 的取值范围;
- (3) 当 $a = -1$ 时, 求证: $f(x) \leq g(x) + x^2$.

20. (本小题满分 16 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, 前 n 项和为 S_n , 首项为 2. 若 $\left(\frac{1}{2}S_{m+n} + 1\right)^2 = a_{2m}\left(1 + \frac{1}{2}S_{2n}\right)$ 对任意的正整数 m, n 恒成立.

- (1) 求 a_2, a_3, a_4 ;
- (2) 求证: $\{a_n\}$ 是等比数列;
- (3) 设数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = a_n - (-1)^n$, 若数列 $b_{n_1}, b_{n_2}, \dots, b_{n_t}$ ($n_1 < n_2 < \dots < n_t, t \in \mathbf{N}^*$) 为等差数列, 求 t 的最大值.

2019 届基地学校四月大联考

数学 II（附加题）

注 意 事 项

考生在答题前请认真阅读本注意事项及各题答题要求

1. 本试卷共 2 页，均为非选择题（第 21~23 题）。本卷满分为 40 分，考试时间为 30 分钟。考试结束后，请将答题卡交回。
2. 答题前，请您务必将自己的姓名、考试证号等用书写黑色字迹的 0.5 毫米签字笔填写在答题卡上，并用 2B 铅笔正确填涂考试号。
3. 作答试题必须用书写黑色字迹的 0.5 毫米签字笔写在答题卡上的指定位置，在其它位置作答一律无效。如有作图需要，可用 2B 铅笔作答，并请加黑、加粗，描写清楚。

21. 【选做题】本题包括 A、B、C 三小题，请选定其中两题，并在相应的答题区域内作答。

若多做，则按作答的前两题评分。解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

A. [选修 4-2：矩阵与变换]（本小题满分 10 分）

已知矩阵 $M = \begin{bmatrix} a & b \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ 的两个特征值为 $\lambda_1 = 2$ ， $\lambda_2 = 3$ 。求直线 $l: x - y + 2 = 0$ 在

矩阵 M 对应变换作用下的直线 l' 的方程。

B. [选修 4-4：坐标系与参数方程]（本小题满分 10 分）

在极坐标系中，已知圆 C 的方程为 $\rho = 2\sin\theta$ ，直线 l 的方程为 $\rho\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = a$ 。

若直线 l 与圆 C 相切，求实数 a 的值。

C. [选修 4-5: 不等式选讲] (本小题满分 10 分)

设函数 $f(x) = |x+1| - |x-4| - a$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最大值;

(2) 若存在 $x \in \mathbf{R}$, 使 $f(x) \geq \frac{4}{a} + 1$ 成立, 求实数 a 的取值范围.

【必做题】第 22、23 题, 每小题 10 分, 共计 20 分. 请在答题卡指定区域内作答, 解答时

应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

22. (本小题满分 10 分)

已知动圆过点 $S(2, 0)$, 且在 y 轴上截得的弦长为 4.

(1) 求动圆圆心 C 的轨迹方程;

(2) 过点 S 的直线 l 与曲线 C 交于点 A, B , 与 y 轴交于点 T , 设 $\overline{TA} = \lambda \overline{SA}$,

$\overline{TB} = \mu \overline{SB}$, 求证: $\lambda + \mu$ 是定值.

23. (本小题满分 10 分)

设 $(1+mx)^{2020} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{2020}x^{2020}$ ($m \in \mathbf{R}$).

(1) 若 $m = 2$, 求 $a_1 + 2a_2 + \cdots + 2020a_{2020}$ 的值;

(2) 若 $m = -1$, 求 $S = \sum_{i=0}^{2020} \frac{1}{a_i}$ 的值.