仪征中学2020届高三数学周练附加题10

21.已知矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}1 & a\\2 & 1\end{bmatrix}$，其中 $a\in R$，若点 $P(1,7)$ 在矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的变换下得到点 $P'(15,9)$，（1）求实数 a 的值；（2）求矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的特征值及其对应的特征向量.

22. 以坐标原点为极点，x 轴的正半轴为极轴，且在两种坐标系中取相同的长度单位，建立极坐标系，判断直线 $l:\begin{cases}x=1+2t\\y=1-2t\end{cases}$（$t$ 为参数）与圆 $C:\rho^2+2\rho\cos\theta-2\rho\sin\theta=0$ 的位置关系.

23. 甲、乙两个篮球运动员互不影响地在同一位置投球，命中率分别为$\frac{1}{2}$与p，且乙投球 2 次均未命中的概率为$\frac{1}{16}$.（Ⅰ）求乙投球的命中率p；

（Ⅱ）若甲投球 1 次，乙投球 2 次，两人共命中的次数记为ξ，求ξ的分布表和数学期望.

24. 设n是给定的正整数，有序数组$(a_1, a_2, \cdots, a_{2n})$同时满足下列条件：

① $a_i \in \{1, -1\}$，$i=1, 2, \cdots, 2n$； ②对任意的$1 \leqslant k \leqslant l \leqslant n$，都有$\left|\sum_{i=2k-1}^{2l} a_i\right| \leqslant 2$.

（1）记A_n为满足“对任意的$1 \leqslant k \leqslant n$，都有$a_{2k-1}+a_{2k}=0$”的有序数组$(a_1, a_2, \cdots, a_{2n})$的个数，求$A_n$；（2）记$B_n$为满足“存在$1 \leqslant k \leqslant n$，使得$a_{2k-1}+a_{2k} \neq 0$”的有序数组$(a_1, a_2, \cdots, a_{2n})$的个数，求$B_n$.

仪征中学 2020 届高三数学周练 10　附加题答案

21 解：（1）由 $\begin{bmatrix}1 & a\\2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15\\9\end{bmatrix}$，　$1+7a=15$ ∴，解得 $a=2$.

（2）矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的属于特征值 -1 的一个特征向量为 $\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$；

矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的属于特征值 3 的一个特征向量为 $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$.

22

解：把直线方程 $l:\begin{cases}x=1+2t\\y=1-2t\end{cases}$ 化为普通方程为 $x+y=2$.

将圆 C：$\rho^2+2\rho\cos\theta-2\rho\sin\theta=0$ 化为普通方程为 $x^2+2x+y^2-2y=0$，

即 $(x+1)^2+(y-1)^2=2$.　圆心 C 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ –所以直线 l 与圆 C 相切.

22．解：（Ⅰ）设“甲投球一次命中”为事件 A，“乙投球一次命中”为事件 B

由题意得 $\left(1-P(B)\right)^2=(1-p)^2=\dfrac{1}{16}$ 解得 $p=\dfrac{3}{4}$ 或 $\dfrac{5}{4}$（舍去），所以乙投球的命中率为 $\dfrac{3}{4}$

（Ⅱ）由题设和（Ⅰ）知 $P(A)=\dfrac{1}{2},P(\overline{A})=\dfrac{1}{2},P(B)=\dfrac{3}{4},P(\overline{B})=\dfrac{1}{4}$

ξ 可能的取值为 0，1，2，3，故 $P(\xi=0)=P(\overline{A})P(\overline{B}\cdot\overline{B})=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^2=\dfrac{1}{32}$

$P(\xi=1)=P(A)P(\overline{B}\cdot\overline{B})+C_2^1P(B)P(\overline{B})P(\overline{A})=\dfrac{7}{32}$

$P(\xi=3)=P(A)P(B\cdot B)=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^2=\dfrac{9}{32}$，　$P(\xi=2)=1-P(\xi=0)-P(\xi=1)-P(\xi=3)=\dfrac{15}{32}$

ξ 的分布表为

ξ	0	1	2	3
P	$\dfrac{1}{32}$	$\dfrac{7}{32}$	$\dfrac{15}{32}$	$\dfrac{9}{32}$

ξ 的数学期望 $E\xi=0\times\dfrac{1}{32}+1\times\dfrac{7}{32}+2\times\dfrac{15}{32}+3\times\dfrac{9}{32}=2$

23．解：（1）因为对任意的$1\leqslant k\leqslant n$，都有$a_{2k-1}+a_{2k}=0$，

所以$A_n=\underbrace{2\times 2\times\cdots\times 2}_{n个2相乘}=2^n$；（3 分）

（2）因为存在$1\leqslant k\leqslant n$，使得$a_{2k-1}+a_{2k}\neq 0$，

所以$a_{2k-1}+a_{2k}=2$或$a_{2k-1}+a_{2k}=-2$，设所有这样的k为$k_1,\ k_2,\ \cdots k_m(1\leqslant m\leqslant n)$，

不妨设$a_{2k_j-1}+a_{2k_j}=2(1\leqslant j\leqslant m)$，则$a_{2k_{j+1}-1}+a_{2k_{j+1}}=-2$（否则$\left|\sum\limits_{i=2k_j-1}^{2k_{j+1}}a_i\right|=4>2$）；

同理，若$a_{2k_j-1}+a_{2k_j}=-2(1\leqslant j\leqslant m)$，则$a_{2k_{j+1}-1}+a_{2k_{j+1}}=2$，------5 分

这说明$a_{2k_j-1}+a_{2k_j}$的值由$a_{2k_1-1}+a_{2k_1}$的值（2 或-2）确定，

又其余的$(n-m)$对相邻的数每对的和均为 0，

所以，$B_n=2\mathrm{C}_n^1\times 2^{n-1}+2\mathrm{C}_n^2\times 2^{n-2}+\cdots+2\mathrm{C}_n^n$------7 分

$=2(2^n+\mathrm{C}_n^1\times 2^{n-1}+\mathrm{C}_n^2\times 2^{n-2}+\cdots+\mathrm{C}_n^n)-2\times 2^n$

$=2(1+2)^n-2\times 2^n\quad=2(3^n-2^n)$．（------10 分）