

## 运用分类讨论的思想方法解题

### 【真题感悟】

1. (2016·浙江改编) 已知函数  $F(x) = \min\{2|x-1|, x^2-6x+10\}$ , 其中  $\min\{p, q\} = \begin{cases} p, & p \leq q, \\ q, & p > q. \end{cases}$  则使得等式  $F(x) = x^2-6x+10$  成立的  $x$  的取值范围为\_\_\_\_\_.

2. (2014·新课标 II 改编) 已知钝角三角形  $ABC$  的面积是  $\frac{1}{2}$ ,  $AB=1$ ,  $BC=\sqrt{2}$ , 则  $AC$  等于\_\_\_\_\_.

3. (2015·湖北改编) 设  $a \geq 1$ , 函数  $f(x) = |x^2 - ax|$  在区间  $[0, 1]$  上的最大值记为  $g(a)$ , 则函数  $g(a)$  的值域为\_\_\_\_\_.

**变题:** (2015·湖北) 设  $a$  为实数, 函数  $f(x) = |x^2 - ax|$  在区间  $[0, 1]$  上的最大值记为  $g(a)$ . 当  $a = \underline{\hspace{2cm}}$  时,  $g(a)$  的值最小.

4. (2015·天津改编) 已知函数  $f(x) = \begin{cases} 2-|x|, & x \leq 2, \\ (x-2)^2, & x > 2, \end{cases}$  函数  $g(x) = 3 - f(2-x)$ , 则函数  $y = f(x) - g(x)$  的零点的个数为\_\_\_\_\_.

### 【考点展示】

1. 设  $n \in \mathbf{N}^*$ , 则和  $S_n = a + a^2 + \dots + a^n = \underline{\hspace{2cm}}$ .

2. 已知圆  $x^2 + y^2 = 4$ , 则经过点  $P(2, 4)$ , 且与圆相切的直线方程为\_\_\_\_\_.

3. 设常数  $a > 0$ , 椭圆  $x^2 - a^2 + a^2 y^2 = 0$  的长轴长是短轴长的 2 倍, 则  $a$  等于\_\_\_\_\_.

4. 已知角  $\theta$  的顶点与原点重合, 始边与  $x$  轴的正半轴重合, 终边在直线  $y = 2x$  上, 则  $\cos 2\theta = \underline{\hspace{2cm}}$ .

5. 已知对称轴为坐标轴的双曲线有一条渐近线的方程为  $2x - y = 0$ , 则该双曲线的离心率所有可能值的集合为\_\_\_\_\_.

6. 若四面体各棱的长是 1 或 2, 且该四面体不是正四面体, 则其体积所有可能值的集合为\_\_\_\_\_.

### 【典题导引】

**例 1** (由数学概念、运算引起的分类讨论) 函数  $f(x) = \begin{cases} \sin(\pi x^2), & -1 < x < 0, \\ e^{x-1}, & x \geq 0, \end{cases}$  若  $f(1) + f(a) = 2$ , 则  $a$  的所有可能值的集合为\_\_\_\_\_.

**训练 1** (1) 若函数  $f(x) = \log_{(a^2-3)}(ax+4)$  在  $[-1, 1]$  上是单调增函数, 则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

(2) 若集合  $A = \{x | ax^2 - ax + 1 < 0\} = \emptyset$ , 则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

(3) 已知  $m \in \mathbf{R}$ , 求函数  $f(x) = (4-3m)x^2 - 2x + m$  在区间  $[0, 1]$  上的最大值.

**例 2** (问题中的条件是分类给出的引起的分类讨论)

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是各项均不为零的  $n$  ( $n \geq 4$ ) 项等差数列, 且公差  $d \neq 0$ , 若将此数列删去某一项后得到的数列(按原来的顺序)是等比数列.

(1) 当  $n=4$  时, 求  $\frac{a_1}{d}$  的值;

(2) 求  $n$  的所有可能值.

**例 3** (由图形或图象引起的分类讨论) 将一张长 8 cm、宽 6 cm 的长方形的纸片沿着一条直线折叠, 折痕(线段)将纸片分成两部分, 面积分别为  $S_1 \text{ cm}^2, S_2 \text{ cm}^2$ , 其中  $S_1 \leq S_2$ . 记折痕长为  $l \text{ cm}$ .

(1) 若  $l=4$ , 求  $S_1$  的最大值;

(2) 若  $S_1 : S_2 = 1 : 2$ , 求  $l$  的取值范围.

**例 4** (问题中的变量或含有需讨论的参数的, 要进行分类讨论)

已知函数  $f(x) = x^2 + 2x, x \in [-2, a] (a > -2)$ , 求  $f(x)$  的值域.