

运用分类讨论的思想方法解题

【真题感悟】

1. (2016·浙江改编) 已知函数 $F(x) = \min\{2|x-1|, x^2-6x+10\}$, 其中 $\min\{p, q\} = \begin{cases} p, & p \leq q, \\ q, & p > q. \end{cases}$ 则使得等式 $F(x) = x^2-6x+10$ 成立的 x 的取值范围为_____.

2. (2014·新课标 II 改编) 已知钝角三角形 ABC 的面积是 $\frac{1}{2}$, $AB=1$, $BC=\sqrt{2}$, 则 AC 等于_____.

3. (2015·湖北改编) 设 $a \geq 1$, 函数 $f(x) = |x^2 - ax|$ 在区间 $[0, 1]$ 上的最大值记为 $g(a)$, 则函数 $g(a)$ 的值域为_____.

变题: (2015·湖北) 设 a 为实数, 函数 $f(x) = |x^2 - ax|$ 在区间 $[0, 1]$ 上的最大值记为 $g(a)$. 当 $a =$ _____ 时, $g(a)$ 的值最小.

4. (2015·天津改编) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2-|x|, & x \leq 2, \\ (x-2)^2, & x > 2, \end{cases}$ 函数 $g(x) = 3 - f(2-x)$, 则函数 $y = f(x) - g(x)$ 的零点的个数为_____.

【考点展示】

1. 设 $n \in \mathbf{N}^*$, 则和 $S_n = a + a^2 + \dots + a^n =$ _____.

2. 已知圆 $x^2 + y^2 = 4$, 则经过点 $P(2, 4)$, 且与圆相切的直线方程为_____.

3. 设常数 $a > 0$, 椭圆 $x^2 - a^2 + a^2 y^2 = 0$ 的长轴长是短轴长的 2 倍, 则 a 等于_____.

4. 已知角 θ 的顶点与原点重合, 始边与 x 轴的正半轴重合, 终边在直线 $y = 2x$ 上, 则 $\cos 2\theta =$ _____.

5. 已知对称轴为坐标轴的双曲线有一条渐近线的方程为 $2x - y = 0$, 则该双曲线的离心率所有可能值的集合为_____.

6. 若四面体各棱的长是 1 或 2, 且该四面体不是正四面体, 则其体积所有可能值的集合为_____.

【典题导引】

例 1 (由数学概念、运算引起的分类讨论) 函数 $f(x) = \begin{cases} \sin(\pi x^2), & -1 < x < 0, \\ e^{x-1}, & x \geq 0, \end{cases}$ 若 $f(1) + f(a) = 2$, 则 a 的所有可能值的集合为_____.

训练 1 (1) 若函数 $f(x) = \log_{(a^2-3)}(ax+4)$ 在 $[-1, 1]$ 上是单调增函数, 则实数 a 的取值范围是_____.

(2) 若集合 $A = \{x | ax^2 - ax + 1 < 0\} = \emptyset$, 则实数 a 的取值范围是_____.

(3) 已知 $m \in \mathbf{R}$, 求函数 $f(x) = (4-3m)x^2 - 2x + m$ 在区间 $[0, 1]$ 上的最大值.

例 2 (问题中的条件是分类给出的引起的分类讨论)

设 a_1, a_2, \dots, a_n 是各项均不为零的 n ($n \geq 4$) 项等差数列, 且公差 $d \neq 0$, 若将此数列删去某一项后得到的数列(按原来的顺序)是等比数列.

(1) 当 $n=4$ 时, 求 $\frac{a_1}{d}$ 的值;

(2) 求 n 的所有可能值.

例 3 (由图形或图象引起的分类讨论) 将一张长 8 cm、宽 6 cm 的长方形的纸片沿着一条直线折叠, 折痕(线段)将纸片分成两部分, 面积分别为 $S_1 \text{ cm}^2, S_2 \text{ cm}^2$, 其中 $S_1 \leq S_2$. 记折痕长为 $l \text{ cm}$.

(1) 若 $l=4$, 求 S_1 的最大值;

(2) 若 $S_1 : S_2 = 1 : 2$, 求 l 的取值范围.

例 4 (问题中的变量或含有需讨论的参数的, 要进行分类讨论)

已知函数 $f(x) = x^2 + 2x, x \in [-2, a] (a > -2)$, 求 $f(x)$ 的值域.