# 发挥模式的教学功能 培养学生的数学思维

韩 玮 (江苏省无锡市辅仁高级中学 214123)

数学是一门研究模式的科学.解决数学问题,从本质上来讲,就是模式识别对主体思维发生作用的过程.主体将新问题与记忆中贮存的相关信息加以匹配,通过思维再创造活动,使问题的解决得以实现.[1] 模式识别,既是一种重要的解题策略,也是一种典型的思维方法.当我们面临一个具体的数学问题时,首先要做的事情,就是辨别问题的类型,从头脑的长时记忆中检索到与这个问题紧密联系的原有的知识、方法和经验,即数学模式,然后运用解决相应数学模式的思路探索出解决问题的方法.显然,没有丰富的模式识别能力和解决数学模式的方法,在数学问题面前就会找不到解决问题的思路,无法展开有效的思维活动,从而显得束手无策.因此,数学教学要充分发挥模式的功能,在指导学生运用模式识别的策略解决问题的过程中使其学会数学思维,从而有效地培养分析问题和解决问题的能力,提升学生的数学核心素养.

## 1 运用模式识别的方法引领问题分析,培养学生思维的条理性和敏捷性

对问题进行分析,弄清问题的条件和结论,联想与问题具有紧密联系的、为解题主体所熟悉的数学基础知识、基本思想方法和类似问题的解题活动经验,由此寻求解决问题的突破口,得出解决问题的思路、策略和实施途径,这是数学解题必须经历的一个十分重要的初始环节,也是解题思维最为活跃的环节.在这个环节中,教师要善于运用模式识别的方法,通过对问题的归类,引领学生全方位、多角度地"揭示隐含,提取信息""灵活转换、翻译信息""由已知到未知、沟通联系并搭建桥梁"[2],进行解题思路产生的基础分析和解题方法形成的过程分析,周密地考虑,正确地判断和迅速地作出结论,使学生学会演绎推理与合情推理,培养学生思维的条理性和敏捷性.

**例 1** 已知 $x$,$y$ 是实数,若 $4x^2+xy+y^2=1$,求 $2x+y$ 的最大值和最小值.

这一问题,虽然已知的条件和求解的目标并不复杂,似乎唾手可得,但许多学生面对它时,却又感到理不清头绪.事实上,如果我们运用模式识别的方法,联想曾经研究过的类似问题常用的解题方法,在此基础上进一步认真地分析问题的条件和结论,不难发现,这是一个二元变量的条件最值问题,与这个问题相联系的基础知识和基本思想方法有基本不等式、引入中间变量和挖掘几何意义、构造几何图形等,由此思维立即被激活,可以很快得出破解这一问题的以下几种思路,使问题顺利获解.

思路 1 运用基本不等式,整体处理,通过解不等式求解.

因为 $4x^2+xy+y^2=1$,所以 $(2x+y)^2=4x^2+4xy+y^2=4x^2+xy+y^2+3xy=1+3xy=1+\frac{3}{2}\cdot 2x\cdot y\leqslant 1+\frac{3}{2}\left(\frac{2x+y}{2}\right)^2=1+\frac{3}{8}(2x+y)^2$.

当且仅当 $\begin{cases}4x^2+xy+y^2=1,\\ 2x=y,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x=\frac{\sqrt{10}}{10},\\ y=\frac{2\sqrt{10}}{10},\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-\frac{\sqrt{10}}{10},\\ y=-\frac{2\sqrt{10}}{10}\end{cases}$ 时取"=" 号,于是由 $(2x+y)^2\leqslant 1+\frac{3}{8}(2x+y)^2$,可以解得 $-\frac{2\sqrt{10}}{5}\leqslant 2x+y\leqslant\frac{2\sqrt{10}}{5}$.

所以当 $\begin{cases}x=\frac{\sqrt{10}}{10},\\ y=\frac{2\sqrt{10}}{10}\end{cases}$ 时,$2x+y$ 取得最大值 $\frac{2\sqrt{10}}{5}$;当 $\begin{cases}x=-\frac{\sqrt{10}}{10},\\ y=-\frac{2\sqrt{10}}{10}\end{cases}$ 时,$2x+y$ 取得最小值 $-\frac{2\sqrt{10}}{5}$.

思路 2　引入中间变量，运用三角换元的方法求解．

由 $4x^2+xy+y^2=1$，配方得 $\left(2x+\frac{y}{4}\right)^2+\frac{15y^2}{16}=1$，令 $\begin{cases}2x+\frac{y}{4}=\cos\theta,\\ \frac{\sqrt{15}y}{4}=\sin\theta,\end{cases}$ 则 $\begin{cases}2x=\cos\theta-\frac{1}{\sqrt{15}}\sin\theta,\\ y=\frac{4}{\sqrt{15}}\sin\theta,\end{cases}$ 于是 $2x+y=\cos\theta-\frac{1}{\sqrt{15}}\sin\theta+\frac{4}{\sqrt{15}}\sin\theta=\frac{3}{\sqrt{15}}\sin\theta+\cos\theta=\frac{3\sin\theta+\sqrt{15}\cos\theta}{\sqrt{15}}=\sqrt{\frac{24}{15}}\left(\frac{3}{\sqrt{24}}\sin\theta+\sqrt{\frac{15}{24}}\cos\theta\right)=\sqrt{\frac{24}{15}}\sin(\theta+\varphi)=\frac{2\sqrt{10}}{5}\sin(\theta+\varphi)$，其中 $\tan\varphi=\sqrt{\frac{5}{3}}$，且 $\varphi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$．

因为 $\theta\in\mathbf{R}$，所以当 $\sin(\theta+\varphi)=1$ 时，$2x+y$ 取得最大值 $\frac{2\sqrt{10}}{5}$；当 $\sin(\theta+\varphi)=-1$ 时，$2x+y$ 取得最小值 $-\frac{2\sqrt{10}}{5}$．

思路 3　挖掘几何意义，运用数形结合的思想方法求解．

将已知条件 $4x^2+xy+y^2=1$ 和要求最值的二元目标函数 $2x+y$ 的代数结构表征为几何图形——平面上的曲线，不妨记 $2x+y=t$，为使 $2x+y$ 取得最大值和最小值，必须且只需直线 $2x+y=t$ 和曲线 $4x^2+xy+y^2=1$“相切”．

由 $\begin{cases}4x^2+xy+y^2=1,\\ 2x+y=t\end{cases}$ 消去 $y$，得到关于 $x$ 的一元二次方程 $6x^2-3tx+t^2-1=0$．

由 $\Delta=(-3t)^2-24(t^2-1)\geqslant 0$，解得 $-\frac{2\sqrt{10}}{5}\leqslant t\leqslant\frac{2\sqrt{10}}{5}$，即 $-\frac{2\sqrt{10}}{5}\leqslant 2x+y\leqslant\frac{2\sqrt{10}}{5}$．

当 $\Delta=0$ 时，应有 $\begin{cases}x=\frac{\sqrt{10}}{10},\\ y=\frac{2\sqrt{10}}{10},\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-\frac{\sqrt{10}}{10},\\ y=-\frac{2\sqrt{10}}{10}.\end{cases}$

故当 $\begin{cases}x=\frac{\sqrt{10}}{10},\\ y=\frac{2\sqrt{10}}{10}\end{cases}$ 时，$2x+y$ 取得最大值 $\frac{2\sqrt{10}}{5}$；当 $\begin{cases}x=-\frac{\sqrt{10}}{10},\\ y=-\frac{2\sqrt{10}}{10}\end{cases}$ 时，$2x+y$ 取得最小值 $-\frac{2\sqrt{10}}{5}$．

在数学学习中，我们通过对所积累的知识经验进行必要的加工，得出具有长久保存价值的相对固定的题型结构和解题策略，可以成为引领我们进行解题分析的基本模式．当我们遇到一个新问题时，先辨认它属于哪一类基本模式，联想起一个已经解决的问题，检索相应的方法来加以解决，这就是“模式识别”．[3] 一些“形异质同”的不同问题往往归类为同一种数学模式，同一个数学问题也可以利用不同的数学模式来加以解决．如果我们的数学教学，能够坚持帮助学生积累“基本模式”，并善于引领学生以运用“模式识别”的方法展开思维活动，进行解题分析，那么经过长期熏陶，就能帮助学生在潜移默化中养成良好的思维习惯，有效地提升思维的条理性和灵活性，使他们在独立面对一个新的研究对象时，不会感到束手无策．这样，那种“讲过练过多遍的问题还不一定会，没有讲过和没有练过的问题一定不会”的现象就可以得到有效的杜绝了．

## 2　运用模式识别的方法进行思维调节，培养学生思维的发散性和独创性

数学解题、尤其是求解一些具有较强综合性的数学问题，是一个复杂的智力活动的过程，它是解题者的一种有目的、有计划的科学活动．在解题活动之初通过解题分析，我们所确定的解题思路往往是粗线条的、概括性的，有的则是尝试性的，由于问题的复杂性，或者解题者思维的缺陷等原因，解题的过程有时会思路受阻或中断，形成解题障碍，或者因运算量大、过程繁琐而难以得出结果．此时，必须根据解题过程中显示的有关信息，及时地进行思维的自我调节，通过改变视角重新审视问题，寻找新的解题途径，以保证解题活动得以顺利进行．[4] 在教学的过程中，我们不仅要教给学生解题的基本模式，更要通过对模式的识别

和比较,指导学生在运用一种数学模式解决问题思维受阻时,进行思维调节的方法,学会思维的自我调节,培养学生思维的发散性和独创性.

例 **2** 已知 $a,b,c$ 均为正实数,并且 $a^2+b^2+c^2=1$,求证:$\sqrt{1-a^2}+\sqrt{1-b^2}+\sqrt{1-c^2}>3-(a+b+c)$.

根据已知条件和解题的目标,学生很容易想到证明不等式的几种基本模式——比较法、分析法、综合法,等等,作出如下的解题分析:

由题设条件 $a^2+b^2+c^2=1$,可得 $1-a^2=b^2+c^2$,$1-b^2=a^2+c^2$,$1-c^2=a^2+b^2$,从而可将待证的不等式变更为 $\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}+\sqrt{a^2+b^2}>3-(a+b+c)$.下面怎么办?许多学生就感到无从下手了,显得欲做不能、欲罢不能,从而陷入了解题困境,导致解题无法进行下去.

这时,教师可引导学生运用模式识别的解题策略,抓住上面利用题设变更后得到的不等式的数学特征,借助特征模式进行思维调节,进一步地将待证的不等式变更为下面的形式:

$(\sqrt{b^2+c^2}+a)+(\sqrt{c^2+a^2}+b)+(\sqrt{a^2+b^2}+c)>3$,只要能够证得 $\sqrt{b^2+c^2}+a>1$,$\sqrt{c^2+a^2}+b>1$,$\sqrt{a^2+b^2}+c>1$,利用同向不等式可加的性质,问题即可迎刃而解.

如何证明 $\sqrt{b^2+c^2}+a>1$,$\sqrt{c^2+a^2}+b>1$,$\sqrt{a^2+b^2}+c>1$ 呢?观察各个不等式的结构特征,结合 $a^2+b^2+c^2=1$,联想直角三角形的勾股定理、三角形两边之和大于第三边以及长方体的对角线的计算公式,可通过构造长方体来解决问题,得到如下简捷巧妙、思维独特、令人拍手叫绝的解法.

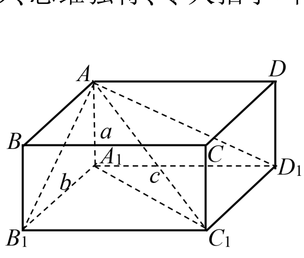

图 1

如图 1,构作以 $a,b,c$ 为三条棱的长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$,其中 $AA_1=a$,$A_1B_1=b$,$A_1D_1=c$.由 $a^2+b^2+c^2=1$,知长方体的对角线长为 1.连结 $AB_1$,$AD_1$,$AC_1$ 和 $A_1C_1$,有 $AB_1=\sqrt{a^2+b^2}$,$AD_1=\sqrt{a^2+c^2}$,$A_1C_1=\sqrt{b^2+c^2}$.在 $\triangle AB_1C_1$ 中,因为 $AB_1+B_1C_1>AC_1$,所以 $\sqrt{a^2+b^2}+c>1$.同理 $\sqrt{a^2+c^2}+b>1$,$\sqrt{b^2+c^2}+a>1$.三式相加并整理可得 $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}>3-(a+b+c)$,即 $\sqrt{1-a^2}+\sqrt{1-b^2}+\sqrt{1-c^2}>3-(a+b+c)$.

本题中,让学生陷入困惑的主要原因是缺乏数形结合的意识和运用数形结合的思想方法分析问题、解决问题的能力.数学是研究数量关系与空间形式的科学,数与形两者本没有不可逾越的鸿沟.数形结合既是一种思想方法,也是一种思维策略,更是一种解题模式.解题经验告诉我们:在寻找解题思维发生困难时,不妨借助图形去探索;在解题过程中遇到繁杂运算使人望而生畏时,不妨借助图形去开辟新路;在需要检验结论是否正确时,不妨借助图形去验证.这就是"以形助数".当然,对于具有明显几何特征的数学问题,我们也可以通过建立平面直角坐标系,借助代数运算的方法使其获得解决,即"以数解形".一个数学问题在同一个体的思维中完全可能具有多种不同的心理表征,它们分别突出了对象的某些(而不是全部)性质;而且,在不同的时刻或场合,所得到"激活"的通常又只是这些不同心理表征中的某一个.[5]因此,数学解题中,在通过初始的归类分析解题失败之后,可以利用模式识别解题策略达到问题解决的目的.教学中,通过长期的言传身教、潜移默化,学生数学思维的发散性和独创性可以得到有效的培养,解题的能力可以得到显著的提升.

## 3 运用模式识别的方法指导回顾反思,培养学生思维的深刻性和批判性

对于数学解题的思维过程,美国著名数学教育家 G·波利亚将其概括成四个阶段,即弄清问题、拟定计划、实现计划和回顾反思[6].所谓解题后的回顾反思,指的是在解决了数学问题之后,通过对问题条件、问题特征、解题思路、解题途径、问题结论、解题中反映出的数学思想方法、思维方式等方面的回顾、概括、总结和反思,对解题活动进行再认识,以便进一步地认清问题的本质,暴露数学解题的一般思维过程,发现解题活动中存在的问题和不足.解题后的回顾反思是数学解题的一个十分重要的环节,通过对解题活动整个过程的回顾与反思,揭示出问题的深层结构,总结出题目的共同特征,将问题进行变式、引申和推广,在扩大解题成果的同时,形成解决一类问题的基本策

略 —— 解题模式，以便从中选择最为合理和准确或者是多样化的解题方法，完成问题的类化，实现问题的最优化解决，从而开发学习者的解题智慧，以达到事半功倍、培养学生思维的深刻性和批判性等思维品质的目的．在这个过程中，可通过“模式识别”整合各类不同信息．

例 **3**　在平面直角坐标系 $xOy$ 中，已知点 $A(m,0)$，$B(m+4,0)$，若 $\odot C$：$x^2+(y-3m)^2=8$ 上存在点 $P$ 使得 $\angle APB=45^\circ$，求实数 $m$ 的取值范围．

这是一个解析几何问题，结合图形分析，点 $P$ 可看作是 $\triangle ABP$ 的外接圆上的点，求出点 $P$ 的轨迹方程，结合点 $P$ 在 $\odot C$ 上，可将问题转化为两圆有公共点的问题，由此建立关于 $m$ 的不等式，通过解不等式求出 $m$ 的取值范围，得出如下解法．

解析　如图2，设 $\triangle ABP$ 的外接圆为 $\odot M$，由于 $AB=4$，由正弦定理可知，$\odot M$ 的半径 $r$ 满足如下关系式：$2r=\dfrac{AB}{\sin\angle APB}=\dfrac{4}{\sin 45^\circ}=4\sqrt{2}$，所以 $\odot M$ 的半径长为 $r=2\sqrt{2}$．

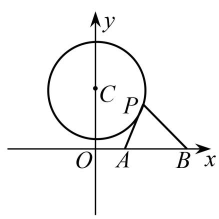

图 2

又易知 $\angle AMB=2\angle APB=90^\circ$，且圆心 $M$ 在线段 $AB$ 的垂直平分线上，可求得点 $M$ 的坐标为 $(m+2,2)$ 或 $(m+2,-2)$．由于点 $P$ 既在 $\odot C$ 上，又在 $\odot M$ 上，则 $\odot C$ 与 $\odot M$ 有公共点．

若点 $M$ 的坐标为 $(m+2,2)$，则 $\odot M$ 的方程为 $(x-m-2)^2+(y-2)^2=8$，此时由于 $\odot M$ 与 $\odot C$ 有公共点，则 $0\leqslant CM\leqslant 4\sqrt{2}$，即 $0\leqslant\sqrt{(m+2)^2+(2-3m)^2}\leqslant 4\sqrt{2}$，化简得 $5m^2-4m-12\leqslant 0$，解 $-\dfrac{6}{5}\leqslant m\leqslant 2$；

若点 $M$ 的坐标为 $(m+2,-2)$，则 $\odot M$ 的方程为 $(x-m-2)^2+(y+2)^2=8$，此时由于 $\odot M$ 与 $\odot C$ 有公共点，则 $0\leqslant CM\leqslant 4\sqrt{2}$，即 $0\leqslant\sqrt{(m+2)^2+(-2-3m)^2}\leqslant 4\sqrt{2}$，化简得 $5m^2+8m-12\leqslant 0$，解得 $-\dfrac{2\sqrt{19}+4}{5}\leqslant m\leqslant\dfrac{2\sqrt{19}-4}{5}$．综上，得实数 $m$ 的取值范围是 $\left[-\dfrac{2\sqrt{19}+4}{5},2\right]$．

得出了问题的结果、完成了解题过程，绝不是学习的终结，解题结束后，教师还要运用“模式识别”的策略引导学生展开更深层次的探索和回顾反思，揭示知识和方法的联系、问题本质特征和问题解决的一般规律，进一步引导学生对类似的问题进行探究，形成解决一类问题的共性思路，实现知识、方法的重组和升华，达到触类旁通、举一反三的目的，从而有效地培养学生思维的深刻性和批判性．对于例 3，我们可以启发、引导学生对其数学模式作如下一些回顾、反思和引申：

回顾反思 1　这是一个解析几何的问题，我们通过建立代数关系，通过解不等式使问题获得了解决，体现了数形结合思想方法的妙用．数形结合不仅仅是将代数问题用几何方法求解即以形助数，也不仅仅是将图形问题转化为代数问题来解决即用数解形，而是密切联系、相互渗透的统一整体，解题时需要灵活加以运用．

回顾反思 2　数学思想方法是数学的灵魂，是实现数学问题解决的锐利武器．本题的求解，不仅运用了数形结合的思想方法，化归与转化、分类与讨论的思想方法在解题中也发挥了重要作用，体现得淋漓尽致．数学解题时，基本模式和一般套路固然重要，但更应注意根据题目的特征，灵活地运用数学思想和方法来指导解题，避免盲目地生搬硬套．

回顾反思 3　求解参数的取值范围，在数学解题中是大量存在和经常出现的，其方法非常丰富也十分灵活．一种最为常见的也较易奏效的方法，就是通过挖掘出问题中的隐含信息，建立起参数关于某一变量的函数关系，转化为求函数的值域或最值使问题获解，或者是建立起参数所满足的不等式(组)，转化为解不等式(组)求出结果．

回顾反思 4　本题的求解，建立起点 $P$ 的轨迹方程，将问题转化为两圆有公共点的问题，是十分关键的一步．这里点 $P$ 的轨迹是一个“隐形圆”，“隐形圆”在数学解题中十分活跃，你能运用求解本题的思维方法来解决下面的几个问题吗？

问题 **1**　已知直线 $l$：$x-y+2=0$ 与 $x$ 轴交于点 $A$，点 $P$ 在直线 $l$ 上，$\odot C$：$(x-2)^2+y^2=2$ 上有且仅有一个点 $B$，满足 $AB\perp BP$，求点 $P$ 的横坐标的取值范围．

问题**2** 已知$\odot C: x^2+(y-2)^2=2$,直线$l: kx-y-2=0$与$y$轴交于点$A$,过$l$上一点$P$作$\odot C$的切线,切点为$T$,若$PA=\sqrt{2}PT$,求实数$k$的取值范围.

问题**3** 已知$\triangle ABC$的三个顶点$A(-1,0)$,$B(1,0)$,$C(3,2)$,其外接圆圆心为$H$.

(1)若直线$l$过点$C$,且被$\odot H$截得的弦长为2,求直线$l$的方程;

(2)对于线段$BH$上的任意一点$P$,若在以$C$为圆心的圆上都存在不同的两点$M$,$N$,使得点$M$是线段$PN$的中点,求$\odot C$的半径$r$的取值范围.

G·波利亚曾经说过:"没有任何一道数学题是可以解决得十全十美的,总剩下些工作要做."[7] 数学教学中,"就题论题"和"题海战术"既低效又十分有害.教师要善于运用"模式识别"的策略,引导学生根据问题的特征开展解题思路的分析,针对解题受阻的原因进行思维调节,围绕问题的解决过程进行解题的回顾和反思,在帮助学生对知识和方法进行总结归类、形成知识网络,优化认知结构,形成运用基本模式解决问题的十分清晰的思维路径图,使得基本模式在积累的过程中越来越牢固、越来越畅通的同时,让学生在不断的分析—综合、探究—比较和回顾—反思的过程中,辨认问题的基本模式,弄清问题的本质特征,揭示问题的深层意义,学会主动地搜索问题解决的策略,在解决问题后构建新的或更高层次的模式,从而有效地训练数学思维的品质,提高分析问题和解决问题的能力,使数学解题能够进入"随心所欲""得心应手"的至高境界,为数学核心素养培养的"落地生根"奠基领航.

参考文献

[1] 余建国.基于模式识别的"基本不等式的应用"教学分析[J].中国数学教育(高中版),2014(3):6-10.

[2] 王弟成.解题教学重要的是要教给学生分析方法[J].数学教学研究,2013(10):9-13.

[3] 王怀学.从一种数学模型的探究谈模式识别的"立"与"破"[J].中学数学月刊,2012(5):12-14.

[4] 尹丽芸,陈津.数学解题中的思维调节[J].机械职业教育,2002(9):26-27.

[5] 黄加卫.刍议数学解题中的"模式识别"策略[J].数学教学研究,2008(3):41-43.

[6] [美]G·波利亚.怎样解题[M].阎育苏,译.北京:科学出版社,1982.

[7] 张晓华.高中数学解题教学中的反思策略例谈[J].中学数学月刊,2012(10):51-52.

(上接第5页)

几门课程的教与学的研究.作者首先聚焦于那些考察学生学习这几门课程的研究,并分析了作者所采取的不同的理论观点和方法.之后关注了关于微积分后继课程教学的研究,包括讲授式教学、探究式教学和教师的专业发展.最后提出对未来研究的展望.

**3** 小结及期望

本书作为《数学教育研究手册》丛书的第二册,聚焦于数学内容及过程的教与学的研究,是四册书中与数学课堂教学联系最紧密的一本书.通过上面的内容介绍,读者可以发现本书涉及面广,基本涵盖了小学、中学、大学关键内容领域的教与学的研究,堪称是一本数学教育的"宝藏书".

本书在介绍具体内容的教与学时,举了很多实际教学中的例子,如17章介绍学生对"三角形"的认识和比较时,书中举了教学中采取的各种干预方式及学生的反应.对于比较抽象的理论方法,作者也通过引入具体问题来降低理论的理解难度.又如,在第11章介绍描述不同建模方法的理论框架时,作者以出租车问题为例,在不同的建模观下提出了不同的建模问题,使读者对不同的建模观有了比较清晰的认识.再如在表2中给出协变推理的6种水平之后,作者使用"瓶子问题"来详细阐述每个水平的思维表现形式,变抽象为具体.

本书对各内容领域的教与学的研究进行了比较全面的综述,并对未来的研究方向进行了展望.对于研究者来说,通过阅读本书,可以全面而迅速地了解各领域内大家广泛关注的问题,以及需要进一步研究的问题,对于确定自己的研究规划很有帮助.另外,书中对于重要的文献不仅介绍研究结果,对于研究方法、研究过程也介绍得比较详细,因此读者可以从中获得研究过程及研究方法的指导.对于一线教师来说,本书有很多实证的教学指导.通过阅读本书,读者能够明确学生学习及教学过程中存在的问题及障碍,并且获取相应的教学策略的指导.