



2021 年全国卷导数解答题新解法^{*}

山东省泰安市宁阳县第一中学 271400 刘才华
陕西省西安市西光中学 710043 吕成杰

【摘要】 2021 年高考数学全国卷共 6 套,由教育部考试中心命制,包括新高考 I 卷 1 套(不分文理科)、新高考 II 卷 1 套(不分文理科)、全国甲卷 2 套(文、理科)、全国乙卷 2 套(文、理科).本文给出其中 6 道导数试题第(2)问简明的新解法.

【关键词】 全国卷;导数;单调性;不等式;范围

2021 年高考数学全国卷共 6 套,由教育部考试中心命制,包括新高考 I 卷 1 套(不分文理科)、新高考 II 卷 1 套(不分文理科)、全国甲卷 2 套(文、理科)、全国乙卷 2 套(文、理科).其中的 6 道导数综合解答题稳中求新,体现了基础性、综合性、应用性和创新性的考查要求.新高考 II 卷第 22 题第(2)问是一道“结构不良问题”,对考生的逻辑推理能力、数学抽象能力、直观想象能力等有很深入的考查.6 道试题的第(1)问容易入手,第(2)问深入增加了难度,突出数学本质,重视理性思维,坚持素养导向、能力为重的命题原则.下面我们对于 6 道导数解答题,第(1)问解题过程从略,第(2)给出简明的新解法,供教学参考.

例 1 (新高考 I 卷第 22 题) 已知函数 $f(x) = x(1 - \ln x)$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 设 a, b 为两个不相等的正数,且 $b \ln a - a \ln b = a - b$, 证明: $2 < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < e$.

解 (1) $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减;

(2) 由 $b \ln a - a \ln b = a - b \Leftrightarrow b(1 + \ln a) = a(1 + \ln b) \Leftrightarrow \frac{1 + \ln a}{a} = \frac{1 + \ln b}{b} \Leftrightarrow \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{\ln a}{a} - \frac{\ln b}{b}$ 得 $f\left(\frac{1}{a}\right) = f\left(\frac{1}{b}\right)$. 由(1)不妨设 $0 < \frac{1}{a} < 1 < \frac{1}{b} < e$, 则 $a > 1 > b > \frac{1}{e}$.

要证明 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > 2$, 只需证明 $\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} >$

$$2\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) = 2\left(\frac{\ln a}{a} - \frac{\ln b}{b}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{b^2} + \frac{2\ln b}{b} > \frac{1}{a^2} + \frac{2\ln a}{a}.$$

设 $g(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{2\ln x}{x} (x > 0)$, 则 $g'(x) = \frac{2(x - x \ln x - 1)}{x^3}$. 由(1)得 $x(1 - \ln x) \leq f(1) = 1$, 则 $g'(x) \leq 0$, $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减, 所以 $g(b) > g(a)$, 故 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > 2$.

设 $h(x) = 2x - x \ln x - e (0 < x < e)$, 则 $h'(x) = 1 - \ln x$, $h(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增, 则 $h(x) < h(e) = 0$, 即 $f(x) = x(1 - \ln x) < -x + e$, 从而 $f\left(\frac{1}{b}\right) < -\frac{1}{b} + e$. 又 $\frac{1}{a} - f\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a} - \ln \frac{1}{a} < 0$, 则 $f\left(\frac{1}{b}\right) + \frac{1}{a} - f\left(\frac{1}{a}\right) < -\frac{1}{b} + e$. 由 $f\left(\frac{1}{a}\right) = f\left(\frac{1}{b}\right)$ 得 $\frac{1}{a} < -\frac{1}{b} + e$, 则 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} < e$. 故 $2 < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < e$.

例 2 (新高考 II 卷第 22 题) 已知函数 $f(x) = (x - 1)e^x - ax^2 + b$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 从下面两个条件中选一个, 证明: $f(x)$ 有一个零点.

① $\frac{1}{2} < a \leq \frac{e^2}{2}$, $b > 2a$; ② $0 < a < \frac{1}{2}$, $b \leq 2a$.

解 (1) $f'(x) = x(e^x - 2a)$.

当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

* 基金项目: 本文是山东省教育科学“十三五”规划 2020 年度重点课题“多元”思维模型教学的理论建构与实践探索的部分成果, 课题批准号: 2020ZD049.



当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时 $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln 2a)$ 和 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(\ln 2a, 0)$ 上单调递减;

当 $a = \frac{1}{2}$ 时, 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增;

当 $a > \frac{1}{2}$ 时 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(\ln 2a, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(0, \ln 2a)$ 上单调递减.

(2) 若选 ①, 由 (1) 知 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(\ln 2a, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(0, \ln 2a)$ 上单调递减.

由 $f(0) = b - 1 > 2a - 1 > 0$, $f\left(-\sqrt{\frac{b}{a}}\right) = \left(-\sqrt{\frac{b}{a}} - 1\right)e^{-\sqrt{\frac{b}{a}}} < 0$ 和零点定理得 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上有唯一的零点. 由 $f(\ln 2a) = (\ln 2a - 1)2a - a(\ln 2a)^2 + b > (\ln 2a - 1)2a - a(\ln 2a)^2 + 2a = a\ln 2a(2 - \ln 2a) \geq 0$ 得 $f(\ln 2a) > 0$, 从而 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上没有零点, 故 $f(x)$ 有一个零点.

若选 ②, 由 (1) 知 $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln 2a)$ 和 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(\ln 2a, 0)$ 上单调递减.

$f(\ln 2a) = (\ln 2a - 1) \cdot 2a - a(\ln 2a)^2 + b \leq (\ln 2a - 1) \cdot 2a - a(\ln 2a)^2 + 2a = a\ln 2a(2 - \ln 2a) < 0$, 从而 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上没有零点. 由常用不等式 $e^x \geq x + 1$, 等号当且仅当 $x = 0$ 时成立, 得

$$\begin{aligned} f\left(\sqrt{\frac{1-b}{1-a}} + 1\right) &> \left[\left(\sqrt{\frac{1-b}{1-a}} + 1\right) - 1\right] \cdot \\ &\left[\left(\sqrt{\frac{1-b}{1-a}} + 1\right) + 1\right] - a\left(\sqrt{\frac{1-b}{1-a}} + 1\right)^2 + b \\ &= (1-a)\left(\sqrt{\frac{1-b}{1-a}} + 1\right)^2 + b - 1 \\ &= 1 - b + 2(1-a)\sqrt{\frac{1-b}{1-a}} + 1 - a + b - 1 \\ &= 2(1-a)\sqrt{\frac{1-b}{1-a}} + 1 - a > 0. \end{aligned}$$

又 $f(0) = b - 1 \leq 2a - 1 < 0$, 由零点定理得 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有唯一的零点, 故 $f(x)$ 有一个零点.

例 3 (全国甲卷理科第 21 题) 已知 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 函数 $f(x) = \frac{x^a}{a^x} (x > 0)$.

(1) 当 $a = 2$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若曲线 $y = f(x)$ 与直线 $y = 1$ 有且仅有两个交点, 求 a 的取值范围.

解 (1) $f(x)$ 的单调增区间为 $\left(0, \frac{2}{\ln 2}\right]$, 单调减

区间为 $\left[\frac{2}{\ln 2}, +\infty\right)$.

(2) $f(x) = \frac{x^a}{a^x} = 1 \Leftrightarrow a^x = x^a \Leftrightarrow x \ln a = a \ln x \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln a}{a}$. 设 $g(x) = \frac{\ln x}{x}$, 则 $g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$. 于是 $g(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减, $g_{\max}(x) = g(e) = \frac{1}{e}$. 当 $x \rightarrow 0$ 时 $g(x) \rightarrow -\infty$; 当 $x \rightarrow +\infty$ 时 $g(x) \rightarrow 0$. 又 $g(1) = 0$, 知曲线 $y = f(x)$ 与直线 $y = 1$ 有且仅有两个交点等价于 $y = g(x)$ 的图象与 $y = \frac{\ln a}{a}$ 的图象有两个交点, 等价于 $0 < \frac{\ln a}{a} < \frac{1}{e}$, 即 $g(1) < g(a) < g(e)$, 故 a 的取值范围为 $(1, e) \cup (e, +\infty)$.

例 4 (全国甲卷文科第 20 题) 设函数 $f(x) = a^2 x^2 + ax - 3 \ln x + 1$, 其中 $a > 0$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $y = f(x)$ 的图象与 x 轴没有公共点, 求 a 的取值范围.

解 (1) $f'(x) = \frac{(2ax + 3)(ax - 1)}{x}$, $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{a}\right)$ 上单调递减, 在 $\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 上单调递增.

(2) 由题意和 $f(1) = a^2 + a + 1 = \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ 知 $y = f(x)$ 的图象在 x 轴的上方.

由 (1) 知 $f_{\min}(x) = f\left(\frac{1}{a}\right) = 3 + 3 \ln a$. 由 $3 + 3 \ln a > 0$ 得 $a > \frac{1}{e}$, 故 a 的取值范围为 $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$.

例 5 (全国乙卷理科第 20 题) 设函数 $f(x) = \ln(a - x)$, 已知 $x = 0$ 是函数 $y = xf(x)$ 的极值点.

(1) 求 a ;

(2) 设函数 $g(x) = \frac{x + f(x)}{xf(x)}$. 证明: $g(x) < 1$.

解 (1) $a = 1$.

(2) 由 (1) 得 $f(x) = \ln(1 - x)$, $g(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$.

$$g(x) = \frac{x + f(x)}{xf(x)} < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)} + \frac{1}{x} < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)} < \frac{x - 1}{x}.$$

当 $x \in (-\infty, 0)$ 时 $f(x) > 0$, $g(x) < 1 \Leftrightarrow x +$



$(1-x) \ln(1-x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x}{1-x} + \ln(1-x) > 0$.
 当 $x \in (0, 1)$ 时 $f(x) < 0$, $g(x) < 1 \Leftrightarrow x +$
 $(1-x) \ln(1-x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x}{1-x} + \ln(1-x) > 0$.
 设 $h(x) = \frac{x}{1-x} + \ln(1-x)$, 则 $h'(x) =$
 $\frac{x}{(1-x)^2}$. 当 $x \in (-\infty, 0)$ 时 $h(x)$ 单调递减; 当
 $x \in (0, 1)$ 时 $h(x)$ 单调递增, 所以当 $x \in (-\infty, 0)$
 $\cup (0, 1)$ 时 $h(x) > h(0) = 0$, 则 $\frac{x}{1-x} + \ln(1-x)$
 > 0 , 故 $g(x) < 1$.

例 6 (全国乙卷文科第 21 题) 已知函数
 $f(x) = x^3 - x^2 + ax + 1$.
 (1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;
 (2) 求曲线 $y = f(x)$ 过坐标原点的切线与曲线
 $y = f(x)$ 的公共点的坐标.
 解 (1) 当 $a \geq \frac{1}{3}$ 时 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上

单调递增;

当 $a < \frac{1}{3}$ 时 $f(x)$ 在 $(-\infty, \frac{1-\sqrt{1-3a}}{3})$ 和
 $(\frac{1+\sqrt{1-3a}}{3}, +\infty)$ 上单调递增, 在
 $(\frac{1-\sqrt{1-3a}}{3}, \frac{1+\sqrt{1-3a}}{3})$ 上单调递减.

(3) 设过坐标原点的切线为直线 L , 切点为 $(t, t^3 - t^2 + at + 1)$. 由 $f(x) = x^3 - x^2 + ax + 1$ 得 $f'(x) = 3x^2 - 2x + a$, $f'(t) = 3t^2 - 2t + a$, 则直线 L 的方程为 $y - (t^3 - t^2 + at + 1) = (3t^2 - 2t + a)(x - t)$, 由直线 L 过原点得 $2t^3 - t^2 - 1 = 0$, 则 $(t-1)(2t^2 + t + 1) = 0$, 得 $t = 1$, 从而 $f'(1) = a + 1$, $f(1) = a + 1$, 所以直线 L 的方程为 $y = (a + 1)x$. 联立 $y = x^3 - x^2 + ax + 1$ 消去 y 得 $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$, 即 $(x + 1)(x - 1)^2 = 0$, 则 $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. 当 $x_1 = -1$ 时 $f(-1) = -a - 1$; 当 $x_2 = 1$ 时 $f(1) = a + 1$. 故所求点的坐标为 $(-1, -a - 1)$ 和 $(1, a + 1)$.

多视角探究一道 2021 年高考数学选择压轴题*

广东省中山市濠头中学 528437 闫伟

【摘要】 本文对 2021 年高考全国乙卷理科第 12 题进行了不同角度多种解法的探析, 给出一类对数式与指数式大小比较的通性通法, 以期启示大家复习备考, 提升复习备考效率.

【关键词】 对数式; 比较大小; 单调性; 放缩法

1 试题呈现与分析

(2021 年全国乙卷理科 12 题) 设 $a = 2\ln 1.01$,
 $b = \ln 1.02$, $c = \sqrt{1.04} - 1$, 则().
 A. $a < b < c$ B. $b < c < a$
 C. $b < a < c$ D. $c < a < b$

试题分析 本题以对数式和根式为载体, 考查实数的比较大小. 这类题型往往题干简洁, 但综合性强, 综合考查对数的运算性质, 函数的单调性, 不等式的性质等知识. 能力层面突出考查学生的推理论证能力、运算求解能力以及综合运用所学知识分析问题和解决问题的能力, 侧重考查逻辑推理、数学运

算等素养. 本题入手宽, 不同的考生可以有不同的切入点, 不同的解法体现不同的思维, 是一道值得深入研究的好题.

2 多视角探究

视角 1 基于函数单调性的视角

因为 $1.01^2 = 1.0201 > 1.02$, 显然 $a = \ln 1.01^2 = \ln 1.0201 > b$, 从选择答案中可以排除 A、D 选项, 剩下 2 个选项中只需比较 a 和 c 的大小即可. 因为 $a - c = 2\ln 1.02 - \sqrt{1.04} + 1 = 2\ln(1 + 0.01) - \sqrt{1 + 4 \times 0.01} + 1$, 从而构造函数 $f(x) = 2\ln(1 + x)$

* 基金项目: 本文系中山市教育科研 2020 年度专门项目课题: 落实高考评价体系“引导教学”核心功能的数学学科实践研究(项目编号: Z2020014)和中山市教育科研 2020 年度项目课题“基于数学新课标下的薄弱高中生数学建模的实践研究”(编号: B2020163)阶段性研究成果.