江苏省仪征中学 2021 届高三数学周三练习 5

一、选择题（本大题共 8 小题，共 40.0 分）

1.　已知集合$A=\{x|\frac{x-1}{x+1}\leq 0\}$，$B=\{x\in Z|(x+2)(x-3)<0\}$，则$A\cap B=(\quad)$

A. $\{0,1\}$　　B. $\{-1,0，1\}$　　C. $\{0,1，2\}$　　D. $\{-1,0，1，2\}$

2.　已知复数 z 满足$z\cdot(1+2i)=3-4i$，则$|z|=(\quad)$

A. $\frac{1}{5}$　　B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　C. $\sqrt{5}$　　D. 5

3.　若$a=3^{0.4}$，$b=\log_{0.2}3$，$c=\log_4 2$，则 a、b、c 的大小关系为(　)

A. $a>b>c$　　B. $b>a>c$　　C. $c>a>b$　　D. $a>c>b$

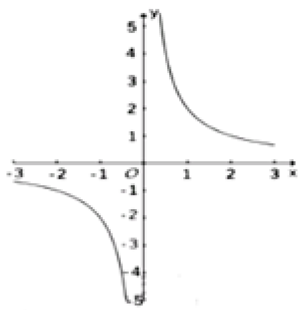
4.　已知函数$f(x)=x^2+(k-2)x$是$[1,+\infty)$上的增函数，则 k 的取值范围为(　)

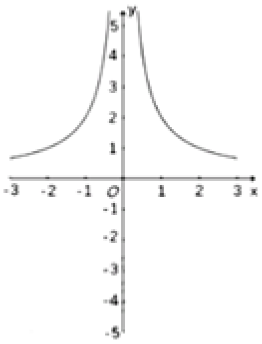
A. $(-\infty,0]$　　B. $[0,+\infty)$　　C. $(-\infty,1]$　　D. $[1,+\infty)$

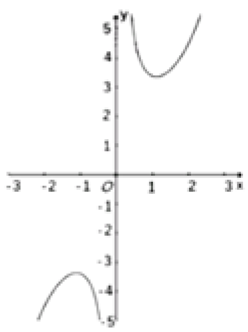
5.　从分别写有 1，2，3，4 的 4 张卡片中随机抽取 1 张，放回后再随机抽取 1 张，则抽得的第一张卡片上的数大于第二张卡片上的数的概率为(　)

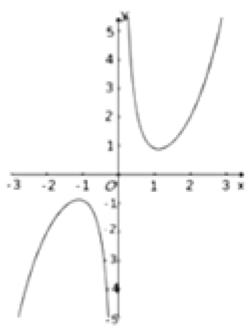
A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{8}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{3}{8}$

6.　函数$f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{\ln(x^2+1)}$，在$[-3,3]$的图象大致为(　)

A. 

B. 

C. 

D. 

7. 若将函数$f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{6})$的图象向右平移$\frac{2\pi}{3}$个单位长度后与原函数的图象关于$x$轴对称，则$\omega$的最小正值是(   )

A. $\frac{3}{2}$　　B. 3　　C. $\frac{9}{2}$　　D. 6

8. 已知定义在$(0,+\infty)$上的函数$f(x)$满足$xf'(x)>f(x)$恒成立(其中$f'(x)$为函数$f(x)$的导函数)，对于任意实数$x_1>0$，$x_2>0$，下列不等式一定正确的是(   )

A. $f(x_1)\cdot f(x_2)\geq f(x_1x_2)$　　B. $f(x_1)\cdot f(x_2)\leq f(x_1x_2)$

C. $f(x_1)+f(x_2)>f(x_1+x_2)$　　D. $f(x_1)+f(x_2)<f(x_1+x_2)$

二、不定项选择题（本大题共 4 小题，共 16.0 分）

9. 若定义在R上的函数$f(x)$满足$f(x+2)=-f(x)$，$f(x+1)$是奇函数，现给出下列 4 个论断：其中正确论断的是(   )

A. 函数$f(x)$是周期为 4 的周期函数

B. 函数$f(x)$的图象关于点$(1,0)$对称

C. 函数$f(x)$是偶函数

D. 函数$f(x)$的图象经过点$(-2,0)$

10. 已知函数$f(x)=\cos(2x-\frac{\pi}{6})$，下列结论中正确的是(   )

A. 函数$f(x)$的周期为π的偶函数

B. 函数$f(x)$在区间$[\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}]$上是单调减函数

C. 若函数$f(x)$的定义域为$(0,\frac{\pi}{2})$，则值域为$(-\frac{1}{2},1]$

D. 函数$f(x)$的图象与$g(x)=-\sin(2x-\frac{2\pi}{3})$的图象重合

11. 设函数$f(x)=x\ln x$，$g(x)=\frac{f'(x)}{x}$，给定下列结论，其中是正确的是(   )

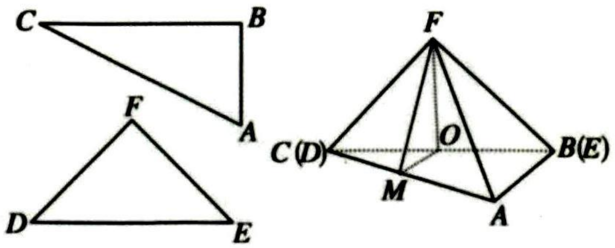
A. 不等式$g(x)>0$的解集为$(\frac{1}{e},+\infty)$

B. 函数$g(x)$在$(0,e)$单调递增，在$(e,+\infty)$单调递减

C. 当$x_1>x_2>0$时，$\frac{m}{2}(x_1^2-x_2^2)>f(x_1)-f(x_2)$恒成立，则$m\geq 1$

D. 若函数$F(x)=f(x)-ax^2$有两个极值点，则实数$a\in(0,\frac{1}{2})$

12. 一副三角板由一块有一个内角为$60°$的直角三角形和一块等腰直角三角形组成，如图所示，$\angle B=\angle F=90°$，$\angle A=60°$，$\angle D=45°$，$BC=DE$，现将两块三角形板拼接在一起，得三棱锥$F-CAB$，取 BC 中点 O 与 AC 中点 M，则下列判断中正确的是



A. 直线$BC\perp$平面 OFM

B. AC 与平面 OFM 所成的角为定值

C. 三棱锥$F-COM$体积为定值

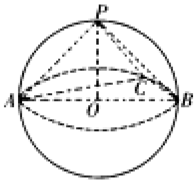
D. 设平面$ABF\cap$平面$MOF=l$，则有$l\parallel AB$

三、填空题（本大题共 4 小题，共 20.0 分）

13. 在$(x^2+1)(x-2)^7$的展开式中x^5的系数是______.

14. 若$sin\alpha=2cos\alpha$，则$\frac{\sin^2 2\alpha-2cos^2 2\alpha}{\sin(\pi-4\alpha)}=$______.

15. 如图所示，已知三棱锥$P-ABC$的各顶点均在一个半径为 R 的球面上，球心 O 在 AB 上，$PO\perp$平面 ABC，$\frac{AC}{BC}=\sqrt{3}$，则三棱锥与球的体积之比为______.



16. 若函数$f(x)=\ln x$与函数$g(x)=x^2+2x+\ln a(x<0)$有公切线，则实数 a 的取值范围是_______.

四、解答题（本大题共 6 小题，共 70.0 分）

17. 设函数$f(x)=|x-a|$.

(1)当$a=2$时，解不等式$f(x)\geq 7-|x-1|$；

(2)若$f(x)\leq 1$的解集为$[0,2]$，$\frac{1}{m}+\frac{1}{2n}=a(m>0,n>0)$，求证：$m+4n\geq 2\sqrt{2}+3$.

18. 已知函数$f(x)=\sin(2\omega x+\frac{\pi}{3})+\sin(2\omega x-\frac{\pi}{3})+2cos^2\omega x$，其中$\omega>0$，且函数$f(x)$的最小正周期为$\pi$

(1)求ω的值；

(2)求$f(x)$的单调增区间

(3)若函数$g(x)=f(x)-a$在区间$[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$上有两个零点，求实数$a$的取值范围.

19. 已知ΔABC的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，满足$\sqrt{3}sinA+cosA=0$.

有三个条件：①$a=1$；②$b=\sqrt{3}$；③$S_{\Delta ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

其中三个条件中仅有两个正确，请选出正确的条件完成下面两个问题：

(1)求c；

(2)设D为BC边上一点，且$AD\perp AC$，求ΔABD的面积.

20. 已知某学校有160名教师，根据所教的学科可以分为文科教师和理科教师. 学校为了了解教师们的健康状况，对全体教师进行睡眠时间的调查，调查结果如表所示.

	文科教师	理科教师
睡眠不足	45	55
睡眠充足	35	25

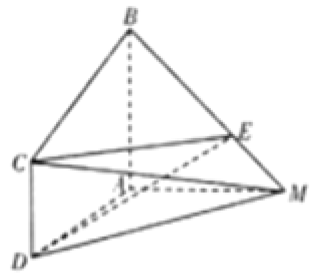
(Ⅰ)用独立性检验的方法，判断是否有99%的把握认为教师的睡眠时间与所教学科有关；

(Ⅱ)按照睡眠是否充足用分层抽样的方法抽取 8 名教师，再从这 8 人中随机抽取 3 人进行健康检查，用 X 表示抽取的 3 人中睡眠充足的教师人数，求随机变量 X 的分布列与数学期望.

附：$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中$n=a+b+c+d$.

$P(K^2\geq k)$	0.50	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

21. 如图，在四棱锥$M-ABCD$中，$AB\perp AD$，$AB=AM=AD=2$，$MB=MD=2\sqrt{2}$.



(1)证明：平面$ABM\perp$平面 $ABCD$；

(2)若$CD//AB$，$2CD=AB$，E 为线段 BM 上一点，且 $BE=2EM$，求三棱锥$D-CEM$的体积.

22. 已知函数$f(x)=lnx-2x^2+3$，$g(x)=f'(x)+4x+alnx(a\neq 0)$.

(1)求函数$f(x)$的单调区间；

(2)若关于 x 的方程$g(x)=a$有实数根，求实数 a 的取值范围.

答案和解析

1.【答案】A

【解析】解：∵集合$A=\{x|\frac{x-1}{x+1}\leq 0\}=\{x|-1<x\leq 1\}$，

$$B=\{x\in Z|(x+2)(x-3)<0\}$$

$$=\{x\in Z|-2<x<3\}$$

$=\{-1,0，1，2\}$，

$\therefore A\cap B=\{0,1\}$.

故选：A.

求出集合 A，B，由此能求出$A\cap B$.

本题考查交集的求法，考查交集定义等基础知识，考查运算求解能力，是基础题.

2.【答案】C

【解析】解：法一：$z=\frac{3-4i}{1+2i}=\frac{(3-4i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{-5-10i}{5}=-1-2i$，

$$\therefore |z|=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$$

法二：$z=\frac{3-4i}{1+2i}$，$\therefore |z|=|\frac{3-4i}{1+2i}|=\frac{|3-4i|}{|1+2i|}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$,

故选：C.

根据复数的运算和复数的模的定义即可求出.

本题考查了复数的运算和复数的模，属于基础题.

3.【答案】D

【解析】解：$\because 3^{0.4}>3^0=1$，$\log_{0.2}3<\log_{0.2}1=0$，

又$\log_4 1<\log_4 2<\log_4 4$，$\therefore 0<c<1$，

$\therefore a>c>b$》

故选：D.

利用指数函数与对数函数的单调性即可得出大小关系.

本题考查了指数函数与对数函数的单调性，考查了推理能力与计算能力，属于基础题.

4.【答案】B

【解析】解：根据题意，函数$f(x)=x^2+(k-2)x$为开口向上的二次函数，其对称轴为$x=-\frac{k-2}{2}$，

若函数$f(x)=x^2+(k-2)x$是$[1,+\infty)$上的增函数，

则必有$-\frac{k-2}{2}\leq 1\Rightarrow k\geq 0$，即$k$的取值范围为$[0,+\infty)$；

故选：B.

根据题意，由二次函数的性质分析$f(x)$的开口方向以对称轴，进而可得$-\frac{k-2}{2}\leq 1$，解可得k的取值范围，即可得答案.

本题考查二次函数的单调性的性质，涉及函数单调性的定义，属于基础题.

5.【答案】D

【解析】解：抽得的第一张卡片上的数大于第二张卡片上的数

考虑第一次抽到的数为4，则有3种情况满足题意；

第一次抽到的数为3，则有2种情况满足题意；

第一次抽到的数为2，则有1种情况满足题意；

满足题意的情况个数为：$1+2+3=6$；

全部情况个数：$4\times 4=16$种；

故概率为$\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$，

故选：D.

利用用分步计数原理可得全部情况个数16种；再根据古典概型可计算.

本题考查分步计数原理和古典概型，属于基础题.

6.【答案】C

【解析】解：根据题意，$f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{\ln(x^2+1)}$，$x\in[-3,3]$，

有$f(-x)=-\frac{e^x-e^{-x}}{\ln(x^2+1)}=-f(x)$，即函数$f(x)$为奇函数，排除$B$、

当$x=1$时，$f(1)=\frac{e-\frac{1}{e}}{ln2}>\frac{e-\frac{1}{e}}{lne}=e-\frac{1}{e}>2$，排除，$D$，

当$x=3$时，$f(3)=\frac{e^3-\frac{1}{e^3}}{ln10}>\frac{e^3-\frac{1}{e^3}}{lne^3}=\frac{1}{3}(e^3-\frac{1}{e^3})>5$，排除$A$，

故选：C.

先判断函数的奇偶性和对称性，利用估算法进行排除即可.

本题考查函数的图象分析，判断函数的奇偶性，以及利用估算法是解决本题的关键．有一定的难度.

7.【答案】A

【解析】解：把函数$f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{6})$的图象向右平移$\frac{2\pi}{3}$个单位长度后与原函数的图象关于$x$轴对称，

则平移了半个周期的奇数倍，于是有$\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{\omega}(2k+1)(k\in Z)$，

即$\omega=3k+\frac{3}{2}(k\in Z)$，故$\omega$的最小正值是$\frac{3}{2}$，

故选：A.

由题意利用函数$y=Asin(\omega x+\varphi)$的图象变换规律，以及三角函数的图象的对称性，求得ω的最小正值.

本题主要考查函数$y=Asin(\omega x+\varphi)$的图象变换规律，正弦函数的图象的对称性，属于基础题.

8.【答案】D

【解析】

【分析】

本题考查了函数的单调性问题，考查导数的应用以及转化思想，是一道中档题.

令$F(x)=\frac{f(x)}{x}$，$F(x)$在$(0,+\infty)$递增，求出$F(x_1+x_2)>F(x_1)$，$F(x_1+x_2)>F(x_2)$，相加即可.

【解答】

解：令$F(x)=\frac{f(x)}{x}$，

$\because xf'(x)>f(x)$恒成立，

$\therefore F'(x)=\frac{xf\prime(x)-f(x)}{x^2}>0$，

故 $F(x)$在$(0,+\infty)$递增，

$\because x_1>0$，$x_2>0$，

$\therefore x_1+x_2>x_1>0$，$x_1+x_2>x_2>0$，

$\therefore F(x_1+x_2)>F(x_1)$，$F(x_1+x_2)>F(x_2)$，

即$\frac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2}>\frac{f(x_1)}{x_1}$，$\frac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2}>\frac{f(x_2)}{x_2}$，

故$f(x_1)<\frac{x_1f(x_1+x_2)}{x_1+x_2}$，$f(x_2)<\frac{x_2f(x_1+x_2)}{x_1+x_2}$，

两式相加得$f(x_1)+f(x_2)<f(x_1+x_2)$，

故选：D.

9.【答案】ABC

【解析】

【分析】

本题主要考查函数的奇偶性、周期性和对称性，考查函数平移变换等知识，为中档题.

由$f(x+2)=-f(x)$可得函数的周期为 4；$f(x)$的图象向左平移 1 个单位后得到$f(x+1)$的图象，由$f(x+1)$是奇函数可得$f(x)$的图象关于点$(1,0)$对称，再通过转化即可得到$f(x)$是偶函数.

【解答】

解：由$f(x+2)=-f(x)$，

得$f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，

所以函数$f(x)$的周期为 4，

故 A 正确；

由$f(x+1)$是奇函数，知$f(x+1)$的图象关于原点对称，

所以函数$f(x)$的图象关于点$(1,0)$对称，

故 B 正确；

由$f(x+1)$是奇函数，得$f(1+x)=-f(1-x)$，

所以$f(-x)=-f(-x+2)=-f(1+1-x)$

$=f(1-(1-x))=f(x)$，

所以函数$f(x)$是偶函数，

故 C 正确；

$f(-2)=-f(-2+2)=-f(0)$，无法判断其值，

故 D 错误.

综上，正确论断的序号是：ABC.

故答案为 ABC.

10.【答案】BD

【解析】

【分析】

本题主要考查了余弦函数的图像与性质，属于基础题，

对题目中的选项一一进行分析，判断正误即可，

【解答】

解：对于 A，由题意可得：$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，

因为$f(-x)=\cos(-2x-\frac{\pi}{6})=\cos(-2x)\cos\frac{\pi}{6}+\sin(-2x)\sin\frac{\pi}{6}=cos2xcos\frac{\pi}{6}-sin2xsin\frac{\pi}{6}$,

$f(x)=\cos(2x-\frac{\pi}{6})=cos2xcos\frac{\pi}{6}+sin2xsin\frac{\pi}{6}$,

所以$f(-x)\neq f(x)$，故 A 不正确，

对于 B，当 $2k\pi\leqslant 2x-\frac{\pi}{6}\leqslant\pi+2k\pi(k\in Z)$ 时函数$f(x)$单调减函数，

解得 $\frac{\pi}{12}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{12}+k\pi(k\in Z)$，故 B 正确.

对于 C，由 B 可知，$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$是单增区间，$[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{2})$ 是减区间，

最大为$f\left(\frac{\pi}{12}\right)=1$，下边界为$f(0)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，或者 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，

因为$f\left(\frac{\pi}{2}\right)<f(0)$，最值为$(-\frac{\sqrt{3}}{2},1]$，故 C 不正确，

对于 D，$g(x)=-\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=f(x)$，

两图像重合，故 D 正确，

故选 BD.

11.【答案】ACD

【解析】

【分析】

本题考查了利用导数研究函数的单调性，极值等问题，考查导数的应用以及转化思想，是一道综合题.

求出函数的导数，根据函数的单调性分别判断 A，B；根据函数$g(x)=\frac{\ln x+1}{x}$，利用导数求最大值可判断 C 和 D.

【解答】

解：$\because$函数$f(x)=xlnx$，$\therefore f'(x)=lnx+1$，

则$g(x)=\frac{lnx+1}{x}$，$g'(x)=-\frac{lnx}{x^2}$，

$g(x)>0$，即$\frac{lnx+1}{x}>0$，亦即$lnx+1>0$，解得$x>\frac{1}{e}$，故 A 正确;

$g'(x)=-\frac{lnx}{x^2}$，当$x\in(0,1)$时，$g'(x)>0$，$g(x)$递增，当$x\in(1,+\infty)$时，$g'(x)<0$，$g(x)$递减，故 B 错误;

若$x_1>x_2>0$时，总有$\frac{m}{2}(x_1^2-x_2^2)>f(x_1)-f(x_2)$恒成立，

等价于$\frac{m}{2}x_1^2-x_1lnx_1>\frac{m}{2}x_2^2-x_2lnx_2$在$(0,+\infty)$恒成立，

令$H(x)=\frac{m}{2}x^2-xlnx$，$(x>0)$，

则上式等价于$H(x)$在$(0,+\infty)$上为增函数，

即等价于$H'(x)=mx-lnx-1\geq 0$恒成立，

即$m\geq\frac{lnx+1}{x}$在$(0,+\infty)$上恒成立，

即$m\geqslant g(x)_{\max}=g(1)=1$，于是$m\geq 1$，故 C 正确；

若函数$F(x)=f(x)-ax^2$有 2 个极值点，

则$F'(x)=f'(x)-2ax$有 2 个变号零点，

即$lnx+1-2ax=0$，$2a=\frac{lnx+1}{x}=g(x)$，

由前可知$g(x)$在$(0,1)$递增，在$(1,+\infty)$递减，

$\therefore g(x)_{max}=g(1)=1$，

又$\because g(e^{-1})=0$，$x>e^{-1}$时$g(x)>0$，且 x 趋近于$+\infty$时，$g(x)$趋近于 0，

$\therefore 2a\in(0,1)$，即$a\in(0,\frac{1}{2})$，故 D 正确，

综上，ACD 正确，

故选 ACD.

12.【答案】ABD

【解析】

【分析】

本题考查空间中直线与直线，直线与平面的位置关系，直线与平面所成角，线面垂直的判定，属中档题.

由$OM\perp BC$，又$OF\perp BC$，且$OM\cap OF=O$，根据线面垂直的判定定理可得$BC\perp$平面 OFM，A 正确；

AC 与平面 OFM 所成角为$\angle CMO=\angle CAB=60°$，$B$ 正确；平面 DEF 转动时，F 到底面 ABC 的距离为变量，而$\triangle COM$的面积为定值，故三棱锥$F-COM$体积为定值错误，C 错误；l 与 AB 共面，又$l\subset$平面 MOF，$AB\not\subset$平面 MOF，可得$l//AB$，故 D 正确.

【解答】

解：因为 O，M 为中点，所以$OM//AB$，所以$OM\perp BC$，

又$OF\perp BC$，且$OM\cap OF=O$，

所以$BC\perp$平面 OFM，故 A 正确；

AC 与平面 OFM 所成角为$\angle CMO=\angle CAB=60°$，故 B 正确；

平面 DEF 转动时，F 到底面 ABC 的距离为变量，而$\triangle COM$的面积为定值，故三棱锥$F-COM$体积为定值错误，故 C 错误；

因为平面$ABF\cap$平面$MOF=l$，

$l\subset$平面 ABF，$AB\subset$平面 ABF，故 l 与 AB 共面，

又$l\subset$平面 MOF，$AB\not\subset$平面 MOF，

则有$l//AB$，故 D 正确.

故选 ABD.

13.【答案】644

【解析】解：$(x^2+1)(x-2)^7$的展开式中x^5的系数由两部分相加构成：

第一部分是由第一个式子x^2+1中x^2的系数 1 与第二个式子$(x-2)^7$的展开式中x^3的系数之积，

即：$1\times C_7^3\times 1^3\times C_4^4(-2)^4=560$.

第二部分是由第一个式子x^2+1中的 1 与第二个式子$(x-2)^7$的展开式中x^5的系数之积，

即：$1\times C_7^5\times 1^5\times C_2^2\times(-2)^2=84$，

$\therefore$在$(x^2+1)(x-2)^7$的展开式中x^5的系数是：

$560+84=644$.

故答案为：644.

$(x^2+1)(x-2)^7$的展开式中x^5的系数由两部分相加构成：第一部分是由第一个式子x^2+1中x^2的系数 1 与第二个式子$(x-2)^7$的展开式中x^3的系数之积，第二部分是由第一个式子x^2+1中的 1 与第二个式子$(x-2)^7$的展开式中x^5的系数之积，由此能求出结果.

本题考查展开式中x^5的系数的求法，考查二项式定理、排列组合等基础知识，考查推理论证能力、运算求解能力，考查化归与转化思想，函数与方程思想、分类与整合思想，是中档题.

14.【答案】$\frac{1}{12}$

【解析】解：$\because sin\alpha=2cos\alpha$，

$\therefore tan\alpha=2$，则$tan2\alpha=\frac{2tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=-\frac{4}{3}$.

$$\therefore\frac{\sin^2 2\alpha-2cos^2 2\alpha}{\sin(\pi-4\alpha)}=\frac{\sin^2 2\alpha-2cos^2 2\alpha}{sin4\alpha}$$
$$=\frac{\sin^2 2\alpha-2cos^2 2\alpha}{2sin2\alpha cos2\alpha}=\frac{\tan^2 2\alpha-2}{2tan2\alpha}$$

$=\frac{(-\frac{4}{3})^2-2}{2\times(-\frac{4}{3})}=\frac{1}{12}$.

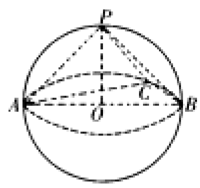
故答案为：$\frac{1}{12}$.

由已知利用同角三角函数基本关系式可求$tan\alpha$的值，利用二倍角的正切函数公式可求$tan2\alpha$的值，进而利用诱导公式，二倍角公式，同角三角函数基本关系式化简，计算即可.

本题主要考查了二倍角公式，诱导公式，同角三角函数基本关系式在三角函数化简求值中的应用，考查了计算能力和转化思想，属于基础题.

15.【答案】$\sqrt{3}$；8π

【解析】解：$\because$球心 0 在 AB 上，$\frac{AC}{BC}=\sqrt{3}$，$\therefore\angle CAB=30°$



$$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{2}R^2$$

$\because PO\perp$平面ABC，$\therefore V_{P-ABC}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}R^2\times R=\frac{\sqrt{3}}{6}R^3$

$$\because V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3$$

$\therefore$三棱锥与球的体积之比为$\frac{\sqrt{3}}{6}R^3$：$\frac{4}{3}\pi R^3=\sqrt{3}$：$8\pi$

故答案为：$\sqrt{3}$：8π

先确定$\angle CAB=30°$，可得$\triangle ABC$的面积，从而可求三棱锥的体积，计算球的体积，即可得到结论．

本题考查三棱锥、球的体积的计算，考查学生的计算能力，属于中档题．

16.【答案】$\left(\frac{1}{2e},+\infty\right)$

【解析】

【分析】

本题主要考查导数的几何意义，以及构造函数，利用导数研究函数的单调性与最值，属于难题．

通过设切点表示切线方程的两种形式，根据对应关系相等可得关于a的函数，分析其单调性得实数a的取值范围．

【解答】

解：设公切线与函数$f(x)=lnx$切于点$A(x_1,\ln x_1)(x_1>0)$，

则切线方程为$y-\ln x_1=\frac{1}{x_1}(x-x_1)$，即$y=\frac{1}{x_1}x+\ln x_1-1$;

公切线与函数$g(x)=x^2+2x+\ln a(x<0)$切于点$B\left(x_2,x_2^2+2x_2+\ln a\right)(x_2<0)$，

则切线方程为$y-\left(x_2^2+2x_2+\ln a\right)=(2x_2+2)(x-x_2)$，即$y=(2x_2+2)x+\ln a-x_2^2$．

所以$\begin{cases}\frac{1}{x_1}=2x_2+2\\ \ln x_1-1=\ln a-x_2^2\end{cases},x_1>0,-1<x_2<0$．

所以$\ln a=x_2^2-\ln(2x_2+2)-1$，

令$t=x_2$，$h(t)=t^2-\ln(2t+2)-1(-1<t<0)$，

所以$h'(t)=2t-\frac{2}{2t+2}=2t-\frac{1}{t+1}<0$，

所以函数$h(t)$在区间$(-1,0)$上单调递减，

所以$h(t) > h(0) = -\ln 2 - 1$，即$\ln a > -\ln 2 - 1 = \ln\frac{1}{2e}$，所以$a > \frac{1}{2e}$.

所以实数 a 的取值范围是$\left(\frac{1}{2e}, +\infty\right)$.

故答案为$\left(\frac{1}{2e}, +\infty\right)$.

17.【答案】解：(1)当$a = 2$时，$f(x) = |x - 2|$，

则不等式$f(x) \geq 7 - |x - 1|$等价为$|x - 2| \geq 7 - |x - 1|$，

即$|x - 2| + |x - 1| \geq 7$，

当$x \geq 2$时，不等式等价为$x - 2 + x - 1 \geq 7$，即$2x \geq 10$，即$x \geq 5$，此时$x \geq 5$；

当$1 < x < 2$时，不等式等价为$2 - x + x - 1 \geq 7$，即$1 \geq 7$，此时不等式不成立，此时无解，

当$x \leq 1$时，不等式等价为$-x + 2 - x + 1 \geq 7$，则$2x \leq -4$，得$x \leq -2$，此时$x \leq -2$，

综上不等式的解为$x \geq 5$或$x \leq -2$，即不等式的解集为$(-\infty, -2] \cup [5, +\infty)$.

(2)若$f(x) \leq 1$的解集为$[0,2]$，

由$|x - a| \leq 1$得$-1 + a \leq x \leq 1 + a$.

即$\begin{cases} 1 + a = 2 \\ -1 + a = 0 \end{cases}$得$a = 1$，

即$\frac{1}{m} + \frac{1}{2n} = a = 1$，$(m > 0, n > 0)$，

则$m + 4n = (m + 4n)(\frac{1}{m} + \frac{1}{2n}) = 1 + 2 + \frac{4n}{m} + \frac{m}{2n} \geq 3 + 2\sqrt{\frac{4n}{m} \cdot \frac{m}{2n}} = 2\sqrt{2} + 3$.

当且仅当$\frac{4n}{m} = \frac{m}{2n}$，即$m^2 = 8n^2$时取等号，

故$m + 4n \geq 2\sqrt{2} + 3$成立.

【解析】(1)利用绝对值的应用表示成分段函数形式，解不等式即可.

(2)根据不等式的解集求出$a = 1$，利用 1 的代换结合基本不等式进行证明即可.

本题主要考查不等式的求解和应用，根据绝对值不等式的性质转化为分段函数形式，利用 1 的代换转化为基本不等式是解决本题的关键．综合性较强.

18.【答案】解：(1) $\because f(x) = \sin(2\omega x + \frac{\pi}{3}) + \sin(2\omega x - \frac{\pi}{3}) + 2cos^2\omega x$

$$= \frac{1}{2}sin2\omega x + \frac{\sqrt{3}}{2}cos2\omega x + \frac{1}{2}sin2\omega x - \frac{\sqrt{3}}{2}cos2\omega x + 1 + cos2\omega x$$

$$= sin2\omega x + cos2\omega x + 1$$

$= \sqrt{2}\sin(2\omega x + \frac{\pi}{4}) + 1$，

$\because T = \frac{2\pi}{2\omega} = \pi$，

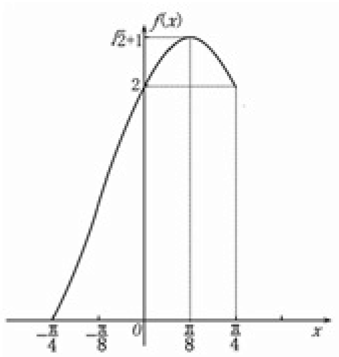
$$\therefore \omega = 1$$

(2)由$2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{4} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}$，$k \in Z$，

解得：$-\frac{3\pi}{8} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{8} + k\pi$，$k \in Z$，

可得$f(x)$的单调增区间为：$[-\frac{3\pi}{8} + k\pi, \frac{\pi}{8} + k\pi]$，$k \in Z$，

(3)作出函数$y = f(x)$在$[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$上的图象如图：



函数$g(x)$有两个零点，即方程$f(x) - a = 0$有两解，亦即曲线$y = f(x)$与$y = a$在$x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$上有两个交点，

从图象可看出$f(0) = f(\frac{\pi}{4}) = 2$，$f(\frac{\pi}{8}) = \sqrt{2} + 1$，

所以当曲线$y = f(x)$与$y = a$在$x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$上有两个交点时，

则$2 \leq a < \sqrt{2} + 1$，即实数 a 的取值范围是$[2, \sqrt{2} + 1)$.

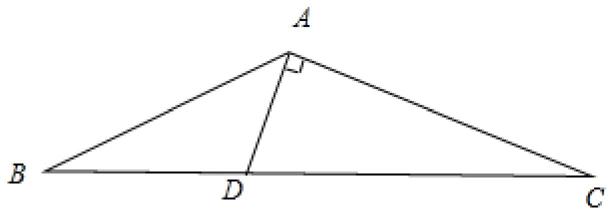
【解析】(1)利用三角函数恒等变换的应用化简函数解析式可得$f(x) = \sqrt{2}\sin(2\omega x + \frac{\pi}{4}) + 1$，利用三角函数周期公式可求$\omega$的值.

(2)由正弦函数的单调性可求$f(x)$的单调增区间.

(3)作出函数$y = f(x)$在$[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$上的图象，从图象可看出$f(0) = f(\frac{\pi}{4}) = 2$，$f(\frac{\pi}{8}) = \sqrt{2} + 1$，可求当曲线$y = f(x)$与$y = a$在$x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$上有两个交点时，$2 \leq a < \sqrt{2} + 1$，即可得解实数 a 的取值范围.

本题主要考查了三角函数恒等变换的应用，三角函数周期公式，正弦函数的图象和性质，考查了计算能力和数形结合思想的应用，属于中档题.

19.【答案】解：(1) $\because \sqrt{3}sinA+cosA=0.\therefore 2sin(A+\frac{\pi}{6})=0$，又$A\in(0,\pi)$，



$\therefore A=\frac{5\pi}{6}$,

$\because A$为钝角，与$a=1<b=\sqrt{3}$矛盾，

$\therefore$ ①②中仅有一个正确，③一定正确，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bcsinA=\frac{\sqrt{3}}{4}$,

$\therefore bc=\sqrt{3}$，

当①③正确时，

由$cosA=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$得：$b^2+c^2=-2$，无解，故不符合题意，

当②③正确时，

$\because bc=\sqrt{3}$，$b=\sqrt{3}$，$\therefore c=1$，经检验成立，

综上所述，$c=1$；

(2)如图所示：

$\because \angle BAC=\frac{5\pi}{6}$，$\angle DAC=\frac{\pi}{2}$，$\therefore \angle BAD=\frac{\pi}{3}$,

$\therefore \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}}=\frac{\frac{1}{2}AB\cdot AD\cdot \sin\angle BAD}{\frac{1}{2}\cdot AD\cdot AC\cdot \sin\angle DAC}=\frac{1}{2}$,

$\therefore S_{\triangle ABD}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}$，

$\therefore S_{\triangle ABD}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{12}$.

【解析】(1)先根据条件求出$A=\frac{5\pi}{6}$，所以A为钝角，与$a=1<b=\sqrt{3}$矛盾，所以①②中仅有一个正确，③一定正确，再分情况讨论，即可得到c的值．

(2)利用$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}}=\frac{1}{2}$得到$S_{\triangle ABD}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}$，从而求出$\triangle ABD$的面积．

本题主要考查了余弦定理，以及三角形面积公式，是中档题．

20.【答案】解：(1)作出列联表：

	文科教师	理科教师	合计
睡眠不足	45	55	100
睡眠充足	35	25	60
合计	80	80	160

$\therefore K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\frac{160(45\times25-35\times55)^2}{80\times80\times100\times60}\approx2.667<6.635$，

∴没有99%的把握认为教师的睡眠时间与所教学科有关.

(2)按照睡眠是否充足用分层抽样的方法抽取8名教师，

则从睡眠充足老师中抽取：$8\times\frac{60}{160}=3$人，从睡眠不足老师中抽取：$8\times\frac{100}{160}=5$人，

再从这8人中随机抽取3人进行健康检查，用X表示抽取的3人中睡眠充足的教师人数，

则X的可能取值为0，1，2，3，

$P(X=0)=\frac{C_5^3}{C_8^3}=\frac{10}{56}$,

$P(X=1)=\frac{C_3^1C_5^2}{C_8^3}=\frac{30}{56}$,

$P(X=2)=\frac{C_3^2C_5^1}{C_8^3}=\frac{15}{56}$,

$P(X=3)=\frac{C_3^3}{C_8^3}=\frac{1}{56}$.

$\therefore X$的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{10}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{1}{56}$

随机变量X的数学期望为：

$E(X)=0\times\frac{10}{56}+1\times\frac{30}{56}+2\times\frac{15}{56}+3\times\frac{1}{56}=\frac{63}{56}$.

【解析】(1)作出列联表，求出$K^2\approx2.667<6.635$，从而没有99%的把握认为教师的睡眠时间与所教学科有关.

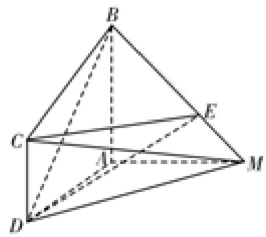
(2)按照睡眠是否充足用分层抽样的方法抽取8名教师，则从睡眠充足老师中抽取3人，从睡眠不足老师中抽取5人，X的可能取值为0，1，2，3，分别求出相应的概率，由此能求出X的分布列和数学期望.

本题考查独立检验的应用，考查离散型随机变量的分布列、数学期望的求法，考查超几何分

布等基础知识，考查运算求解能力，是中档题．

21.【答案】(1)证明：$\because$在四棱锥$M-ABCD$中，$AB\perp AD$，$AB=AM=AD=2$，

$MB=MD=2\sqrt{2}$.



$\therefore AB^2+AM^2=BM^2$，$AD^2+AM^2=DM^2$，

$\therefore AB\perp AM$，$AD\perp AM$，

$\because AD\cap AB=A$，$\therefore AM\perp$平面$ABCD$，

又$AM\subset$平面ABM，$\therefore$平面$ABM\perp$平面$ABCD$；

(2)解：连接BD，$\because BE=2EM$，$\therefore S_{\triangle DEM}=\frac{1}{3}S_{\triangle MDB}$，

于是$V_{D-CEM}=V_{C-DEM}=\frac{1}{3}V_{C-DBM}=\frac{1}{3}V_{M-BCD}$，

又$\because CD//AB$，$AB\perp AD$，$\therefore CD\perp AD$，

$\therefore S_{\triangle CDB}=\frac{1}{2}\times CD\times AD=\frac{1}{2}\times 1\times 2=1$，

$\therefore V_{M-BCD}=\frac{1}{3}S_{\triangle BCD}\cdot MA=\frac{1}{3}\times 1\times 2=\frac{2}{3}$,

即$V_{D-CEM}=\frac{1}{3}V_{M-BCD}=\frac{2}{9}$.

【解析】(1)由已知求解三角形证明$AB\perp AM$，$AD\perp AM$，再由直线与平面垂直的判定可得$AM\perp$平面$ABCD$，进一步得到平面$ABM\perp$平面$ABCD$；

(2)连接BD，由$BE=2EM$，得$S_{\triangle DEM}=\frac{1}{3}S_{\triangle MDB}$，可得$V_{D-CEM}=V_{C-DEM}=\frac{1}{3}V_{C-DBM}=\frac{1}{3}V_{M-BCD}$，求出三棱锥$M-BCD$的体积得答案．

本题考查平面与平面垂直的判定，考查空间想象能力与思维能力，训练了利用等体积法求多面体的体积，是中档题．

22.【答案】解：(1)依题意，得$f'(x)=\frac{1}{x}-4x=\frac{1-4x^2}{x}=\frac{(1+2x)(1-2x)}{x}$，$x\in(0,+\infty)$．

令$f'(x)>0$，即$1-2x>0$．

解得$0<x<\frac{1}{2}$;

令$f'(x)<0$，即$1-2x<0$．

解得$x>\frac{1}{2}$.

故函数$f(x)$的单调递增区间为$(0,\frac{1}{2})$，单调递减区间为$(\frac{1}{2},+\infty)$．

(2)由题得，$g(x)=f'(x)+4x+alnx=\frac{1}{x}+alnx$.

依题意，方程$\frac{1}{x}+alnx-a=0$有实数根，

即函数$h(x)=\frac{1}{x}+alnx-a$存在零点.

又$h'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{a}{x}=\frac{ax-1}{x^2}$.

令$h'(x)=0$，得$x=\frac{1}{a}$.

当$a<0$时，$h'(x)<0$.

即函数$h(x)$在区间$(0,+\infty)$上单调递减，

而$h(1)=1-a>0$，$h(e^{1-\frac{1}{a}})=\frac{1}{e^{1-\frac{1}{a}}}+a(1-\frac{1}{a})-a=\frac{1}{e^{1-\frac{1}{a}}}-1<\frac{1}{e}-1<0$.

所以函数$h(x)$存在零点；

当$a>0$时，$h'(x)$，$h(x)$随 x 的变化情况如下表：

x	$(0,\frac{1}{a})$	$\frac{1}{a}$	$(\frac{1}{a},+\infty)$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	单调递减	极小值	单调递增

所以$h(\frac{1}{a})=a+aln\frac{1}{a}-a=-alna$为函数$h(x)$的极小值，也是最小值.

当$h(\frac{1}{a})>0$，即$0<a<1$时，函数$h(x)$没有零点；

当$h(\frac{1}{a})\leq 0$，即$a\geq 1$时，注意到$h(1)=1-a\leq 0$，$h(e)=\frac{1}{e}+a-a=\frac{1}{e}>0$，

所以函数$h(x)$存在零点.

综上所述，当$a\in(-\infty,0)\cup[1，+\infty)$时，方程$g(x)=a$有实数根.

【解析】(1)依题意，得$f'(x)=\frac{1}{x}-4x=\frac{1-4x^2}{x}=\frac{(1+2x)(1-2x)}{x}$，$x\in(0,+\infty)$.令$f'(x)>0$，$f'(x)<0$，解出不等式即可得出单调区间.

(2)由题得，$g(x)=f'(x)+4x+alnx=\frac{1}{x}+alnx$.依题意，方程$\frac{1}{x}+alnx-a=0$有实数根，

即函数$h(x)=\frac{1}{x}+alnx-a$存在零点．利用导数研究其单调性极值应与最值即可得出.

本题考查了利用导数研究函数的单调性极值与最值、方程与不等式的解法、分类讨论方法，

考查了推理能力与计算能力，属于难题．