

微专题：平面向量数量积的解题策略

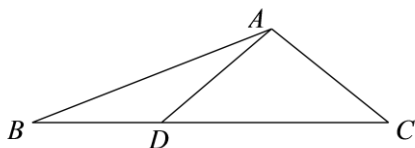
【学习目标】

熟练掌握平面向量应用的三个纬度：基底、坐标、几何.

体会数形结合思想、转化与化归思想在平面向量与其它知识点交汇处的应用.

【温故】

1. 已知 $|\mathbf{a}|=2$, $|\mathbf{b}|=3$, $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 的夹角为 120° , 则 $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=$ _____.
2. 若 O 是 $\triangle ABC$ 所在平面内一点, 且满足 $|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|$, 则 $\triangle ABC$ 的形状为_____.
3. 已知非零向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 满足 $|\mathbf{a}|=|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=1$, $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 的夹角为 120° , 则 $|\mathbf{b}|=$ _____.
4. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = \frac{2\pi}{3}$, $AB=2$, $AC=1$, D 是边 BC 上一点, $DC=2BD$, 则 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}=$ _____.



【例题】

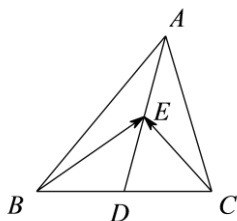
例 1. 设 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 是单位向量, 且 $\mathbf{a}=\mathbf{b}+\mathbf{c}$, 则向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 的夹角等于_____.

变式 1. 设 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 是单位向量, $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, 则 $(\mathbf{a}+\mathbf{b}+2\mathbf{c}) \cdot \mathbf{c}$ 的最大值是_____.

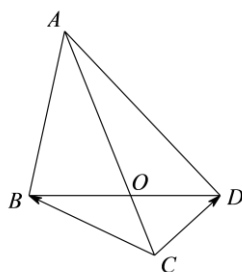
变式 2. 已知向量 $\mathbf{a} = (1, 1)$, $\mathbf{b} = (-1, 1)$, 设向量 $\mathbf{c}$ 满足 $(2\mathbf{a} - \mathbf{c}) \cdot (3\mathbf{b} - \mathbf{c}) = 0$, 则 $|\mathbf{c}|$ 的最大值为_____.

变式 3. 已知向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 满足 $|\mathbf{a}| = 1$, $(2\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - 2\mathbf{b}) = 0$, 则 $|\mathbf{b}|$ 的最小值为_____.

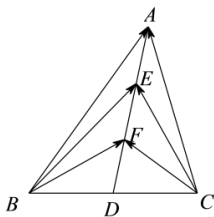
例 2. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D, E 分别是 BC, AD 的中点, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA} = 4$, $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DB} = -1$, 则 $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{CE}$ 的值是_____.



变式 1. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 5$, $BD = 4$, O 为 BD 的中点, 且 $\overrightarrow{AO} = 3\overrightarrow{OC}$, 则 $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} =$ _____.



变式 2. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D 是 BC 的中点, E, F 是 AD 上两个三等分点, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA} = 4$, $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{CF} = -1$, 则 $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{CE}$ 的值是_____.

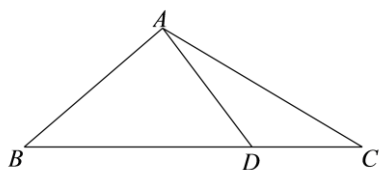


【反馈】

1. a, b 为单位向量, 若 $|a - 4b| = 3\sqrt{2}$, 则 $|a + 4b| =$ _____.

2. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 60^\circ$, $AB = 3$, $AC = 2$. 若 $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AE} = \lambda \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ ($\lambda \in \mathbf{R}$), 且 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE} = 6$, 则实数 λ 的值为_____.

3. 如图, 已知在 $\triangle ABC$ 中, $AD \perp AB$, $\overrightarrow{BC} = \sqrt{3}\overrightarrow{BD}$, $|\overrightarrow{AD}| = 1$, 则 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} =$ _____.



4. 已知圆 O 的直径 $AB = 2$, C 是该圆上异于 A, B 的一点, P 是圆 O 所在平面上任一点, 则 $(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}) \cdot \overrightarrow{PC}$ 的最小值为_____.

微专题：平面向量数量积的解题策略

【学习目标】

熟练掌握平面向量应用的三个纬度：基底、坐标、几何，体会数形结合思想、转化与化归思想在平面向量与其它知识点交汇处的应用.

【温故】

1. 已知 $|\mathbf{a}|=2$, $|\mathbf{b}|=3$, $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 的夹角为 120° , 则 $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=$ _____.

解析 由题意可得: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times 3 \times \cos 120^\circ = -3$,

则: $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(\vec{a} + \vec{b})^2} = \sqrt{\vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2} = \sqrt{4 - 2 \times 3 + 9} = \sqrt{7}$.

2. 若 O 是 $\triangle ABC$ 所在平面内一点, 且满足 $|\vec{AB} - \vec{AC}| = |\vec{AB} + \vec{AC}|$, 则 $\triangle ABC$ 的形状为_____.

解析 $|\vec{AB} - \vec{AC}| = |\vec{AB} + \vec{AC}|$, 由此可得以 AB, AC 为邻边的平行四边形为矩形. $\therefore \angle BAC = 90^\circ$, 得 $\triangle ABC$ 的形状是直角三角形, 故答案为直角三角形.

变题: 若 O 是 $\triangle ABC$ 所在平面内一点, 且满足 $|\vec{OB} - \vec{OC}| = |\vec{OB} + \vec{OC} - 2\vec{OA}|$, 则 $\triangle ABC$ 的形状为_____.

解析 $\because \vec{CB} = \vec{OB} - \vec{OC}$, $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$, $\therefore |\vec{OB} - \vec{OC}| = |\vec{OB} + \vec{OC} - 2\vec{OA}|$,

即 $|\vec{CB}| = |\vec{AB} + \vec{AC}|$. $\because \vec{CB} = \vec{AB} - \vec{AC}$, $\therefore |\vec{AB} - \vec{AC}| = |\vec{AB} + \vec{AC}|$,

由此可得以 AB, AC 为邻边的平行四边形为矩形. $\therefore \angle BAC = 90^\circ$,

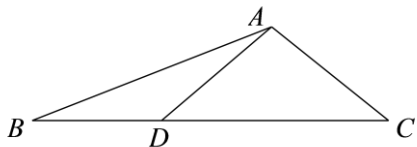
得 $\triangle ABC$ 的形状是直角三角形, 故答案为直角三角形.

3. 已知非零向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 满足 $|\mathbf{a}| = |\mathbf{a} + \mathbf{b}| = 1$, $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 的夹角为 120° , 则 $|\mathbf{b}| =$ _____.

解析 1.

4. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = \frac{2\pi}{3}$, $AB = 2$, $AC = 1$, D 是边 BC 上一点, $DC = 2BD$,

则 $\vec{AD} \cdot \vec{BC} =$ _____.



解析 $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}$ 模长未知 ($|\overrightarrow{BC}|$ 尚可求出), 夹角未知, 所以很难直接求出数量积.

考虑是否有合适基底, $\angle BAC = 120^\circ, AB = 2, AC = 1$,

可计算出 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cos 120^\circ = -1$, 进而对于 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$,

模长均已知, 数量积已求, 条件齐备, 适合作为基底.

用 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 表示 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}$: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$,

$$\therefore \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \cdot \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}^2 + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}^2 = -\frac{8}{3}.$$

【例题】

例 1. 设 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 是单位向量, 且 $\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$, 则向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 的夹角等于_____.

解析 $\frac{\pi}{3}$.

变式 1. 设 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 是单位向量, $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, 则 $(\mathbf{a} + \mathbf{b} + 2\mathbf{c}) \cdot \mathbf{c}$ 的最大值是_____.

解析 $2 + \sqrt{2}$.

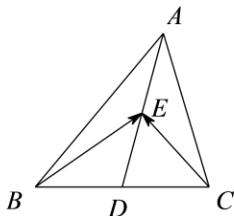
变式 2. 已知向量 $\mathbf{a} = (1, 1)$, $\mathbf{b} = (-1, 1)$, 设向量 $\mathbf{c}$ 满足 $(2\mathbf{a} - \mathbf{c}) \cdot (3\mathbf{b} - \mathbf{c}) = 0$, 则 $|\mathbf{c}|$ 的最大值为_____.

解析 $\sqrt{26}$.

变式 3. 已知向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 满足 $|\mathbf{a}| = 1$, $(2\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - 2\mathbf{b}) = 0$, 则 $|\mathbf{b}|$ 的最小值为_____.

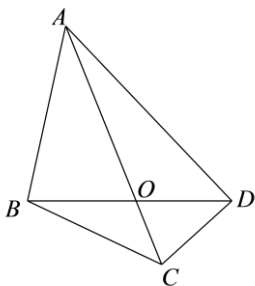
解析 $\frac{1}{2}$.

例 2. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D, E 分别是 BC, AD 的中点, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA} = 4$, $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DB} = -1$, 则 $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{CE}$ 的值是_____.



解析 $\frac{1}{4}$.

变式 1. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 5$, $BD = 4$, O 为 BD 的中点, 且 $\overrightarrow{AO} = 3\overrightarrow{OC}$, 则 $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} =$ _____.



解析 在 $\triangle ABD$ 中, 由余弦定理可得: $\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AD}^2 = \overrightarrow{BD}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = 16 + 10 = 26$,

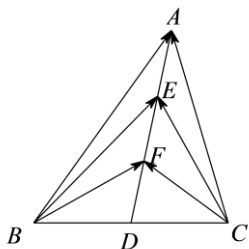
由题意可得: $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} - \frac{4}{3}\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB} - \frac{4}{3} \times \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$,

$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} - \frac{4}{3}\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AD} - \frac{4}{3} \times \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$,

故 $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} = \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AD} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\right) = -\frac{2}{9}(\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AD}^2) + \frac{5}{9}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = -3$, 故答案为

-3.

变式 2. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D 是 BC 的中点, E, F 是 AD 上两个三等分点, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA} = 4$, $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{CF} = -1$, 则 $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{CE}$ 的值是_____.



解析 解法一（基底法）：令 $\overrightarrow{DC} = \mathbf{a}$ ， $\overrightarrow{DF} = \mathbf{b}$ ，则 $\overrightarrow{DB} = -\mathbf{a}$ ， $\overrightarrow{DE} = 2\mathbf{b}$ ， $\overrightarrow{DA} = 3\mathbf{b}$ ，

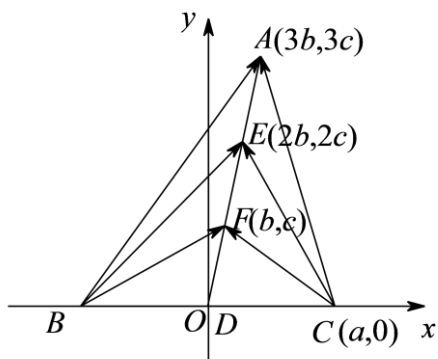
则 $\overrightarrow{BA} = \mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ ， $\overrightarrow{CA} = -\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ ， $\overrightarrow{BE} = \mathbf{a} + 2\mathbf{b}$ ，

$\overrightarrow{CE} = -\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$ ， $\overrightarrow{BF} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ ， $\overrightarrow{CF} = -\mathbf{a} + \mathbf{b}$ ，

故 $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA} = -\mathbf{a}^2 + 9\mathbf{b}^2 = 4$ ， $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{CF} = -\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 = -1$ ，因此 $\mathbf{a}^2 = \frac{13}{8}$ ， $\mathbf{b}^2 = \frac{5}{8}$ 。

故 $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{CE} = -\mathbf{a}^2 + 4\mathbf{b}^2 = \frac{4 \times 5}{8} - \frac{13}{8} = \frac{7}{8}$ 。故填 $\frac{7}{8}$ 。

解法二（建系法）：可以考虑以 D 为原点， BC 所在直线为 x 轴， BC 的中垂线为 y 轴建立如图所示的平面直角坐标系，不妨设 $C(a, 0)$ ， $F(b, c)$ ，则 $B(-a, 0)$ ， $E(2b, 2c)$ ， $A(3b, 3c)$ 。



则 $\overrightarrow{BA} = (3b + a, 3c)$ ， $\overrightarrow{CA} = (3b - a, 3c)$ ， $\overrightarrow{BE} = (2b + a, 2c)$ ，

$\overrightarrow{CE} = (2b - a, 2c)$ ， $\overrightarrow{BF} = (b + a, c)$ ， $\overrightarrow{CF} = (b - a, c)$ ，

由题意 $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA} = 9b^2 + 9c^2 - a^2 = 4$ ， $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{CF} = b^2 + c^2 - a^2 = -1$ ，

因此 $\mathbf{a}^2 = \frac{13}{8}$ ， $b^2 + c^2 = \frac{5}{8}$ ，故 $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{CE} = 4b^2 + 4c^2 - a^2 = \frac{4 \times 5}{8} - \frac{13}{8} = \frac{7}{8}$ 。故填 $\frac{7}{8}$ 。

【反馈】

1. $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 为单位向量, 若 $|\mathbf{a} - 4\mathbf{b}| = 3\sqrt{2}$, 则 $|\mathbf{a} + 4\mathbf{b}| =$ _____.

解析 由题 $|\vec{a} - 4\vec{b}| = 3\sqrt{2}$, 两边平方 $(\vec{a} - 4\vec{b})^2 = 18$, 得 $\vec{a}^2 - 8\vec{a} \cdot \vec{b} + 16\vec{b}^2 = 18$, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{1}{8}$,

$|\vec{a} + 4\vec{b}|^2 = (\vec{a} + 4\vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 8\vec{a} \cdot \vec{b} + 16\vec{b}^2 = 1 + 8 \times (-\frac{1}{8}) + 16 = 16$. 则 $|\vec{a} + 4\vec{b}| = 4$.

2. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 60^\circ$, $AB = 3$, $AC = 2$. 若 $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AE} = \lambda \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ ($\lambda \in \mathbf{R}$),

且 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE} = 6$, 则实数 λ 的值为_____.

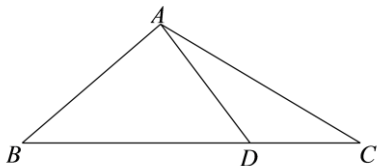
解析 $\because \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{DC}, \therefore \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

则 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE} = \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right) \cdot (\lambda \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{3}\lambda \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}^2 + \frac{2}{3}\lambda \overrightarrow{AC}^2 - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$

$\because AB = 3, AC = 2 \therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \times 2 \times \frac{1}{2} = 3$ 原式 $= \lambda - 3 + \frac{8}{3}\lambda - 2 = 6, \therefore \lambda = 3$ 故实数 λ 的值为 3.

3. 如图, 已知在 $\triangle ABC$ 中, $AD \perp AB$, $\overrightarrow{BC} = \sqrt{3}\overrightarrow{BD}$, $|\overrightarrow{AD}| = 1$, 则

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} =$ _____.



解析 观察条件, $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ 很难直接利用公式求解. 考虑选择两个向量表示 $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$,

条件中 $AD \perp AB \Rightarrow \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ (数量积有了), $|\overrightarrow{AD}| = 1$ (模长有了),

所以考虑用 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ 作为基底.

下一步只需将 $\overrightarrow{AC}$ 表示出来, $\overrightarrow{BC} = \sqrt{3}\overrightarrow{BD} \Rightarrow BD:CD = 1:(\sqrt{3}-1)$

(底边比值——联想到“爪”字型图) $\overrightarrow{AD} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{\sqrt{3}}\overrightarrow{AC}$,

解得: $\overrightarrow{AC} = \sqrt{3}\overrightarrow{AD} - (\sqrt{3}-1)\overrightarrow{AB}$,

$$\text{所以 } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = (\sqrt{3}\overrightarrow{AD} - (\sqrt{3}-1)\overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{AD} = \sqrt{3}\overrightarrow{AD}^2 = \sqrt{3}$$

4. 已知圆 O 的直径 AB=2，C 是该圆上异于 A、B 的一点，P 是圆 O 所在平面上任一点，则

$(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}) \cdot \overrightarrow{PC}$ 的最小值为_____.

【答案】 $-\frac{1}{2}$

【解析】

$$\text{试题分析: } (\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}) \cdot \overrightarrow{PC} = 2\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{PC} = 2\overrightarrow{PO} \cdot (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OC}) = 2\overrightarrow{PO}^2 + 2\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{OC}$$

设 $\langle \overrightarrow{PO}, \overrightarrow{OC} \rangle = \theta$ ，则

$$(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}) \cdot \overrightarrow{PC} = 2|\overrightarrow{PO}|^2 + 2|\overrightarrow{PO}|\cos\theta = 2(|\overrightarrow{PO}| + \frac{\cos\theta}{2})^2 - \frac{\cos^2\theta}{2} \geq -\frac{\cos^2\theta}{2} \geq -\frac{1}{2}.$$