重庆市高2022届高三第四次质量检测

数学试题

命审单位：重庆南开中学

2021.12

注意事项：

1.本试卷满分150分，考试时间120分钟.

2.答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上.

3.回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号.回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效.

4.考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$的长轴长为（　　）

A.2　　B.3　　C.6　　D.9

2."实数$a>0$"是"方程$x^2+y^2-2x-a=0$"表示圆的（　　）

A.充分不必要条件　　B.必要不充分条件

C.充要条件　　D.既不充分也不必要条件

3.在等差数列$\{a_n\}$中，$a_1+a_2=1,a_3+a_4=5$，则$\{a_n\}$的公差为（　　）

A.1.　　B.2　　C.3　　D.4

4.已知单位向量$\vec{e_1},\vec{e_2}$的夹角为$60^\circ,\vec{a}=\vec{e_1}+\vec{e_2},\vec{b}=x\vec{e_1}+2\vec{e_2}$.若$\vec{a}\perp\vec{b}$，则实数$x$的值为（　　）

A.2　　B.-2　　C.4　　D.-4

5.在$\triangle ABC$中，角A,B,C所对的边分别为a,b,c，满足$\frac{1}{\tan B}+\frac{1}{\tan C}=\frac{a}{\sqrt{3}\sin C}$，则$b=$（　　）

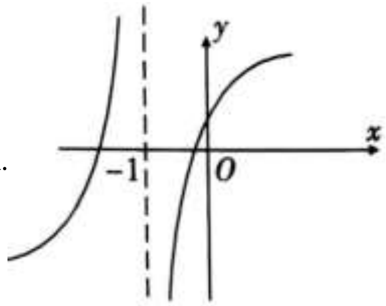
A.$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B.$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C.$\sqrt{3}$　　D.3

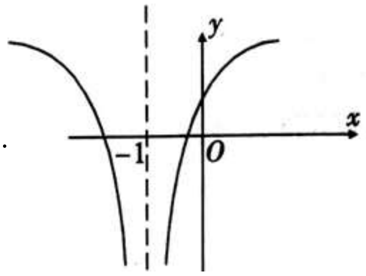
6.在公历纪年法中，为了弥补因人为历法规定造成的年度天数与地球实际公转周期的时间差，设立了闰年.历法中关于公历闰年判定应遵循的规律为：四年一闰，百年不闰，四百年再闰.即：对非整百年，能被4整除的为闰年（如2020年是闰年，2021年不是闰年）；对整百年，能被400整除的为闰年（如2000年是闰年，1900年不是闰年）.若某年是闰年，则该年2月份有29天，否则2月份是28天.2021年7月1日（星期四）是中国共产党建党100周年纪念日，举国上下一片欢腾，首都北京举行隆重盛典，共庆党的生日.在中国共产党的领导下，2022年10月1日，新中国也将迎来成立73周年华诞，那又将是全国人民举国欢庆的重要日子.根据以

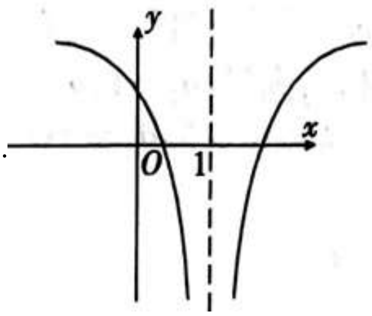
上信息，结合所学知识，可以推算出 2022 年 10 月 1 日是（　　）

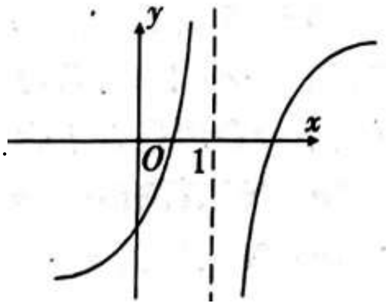
A.星期一　　B.星期二　　C.星期四　　D.星期六

7.函数 $g\left(x\right)=f\left(x-1\right)-f\left(1-x\right)$ 的图像可能是（　　）

A.


B.


C.


D.


8.椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左顶点、左焦点、上顶点分别为 A,F,B，若坐标原点 O 关于直线 BF 的对称点恰好在直线 AB 上，则椭圆 C 的离心率 $e\in$（　　）

A.$\left(0,\dfrac{1}{4}\right)$　　B.$\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}\right)$　　C.$\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{4}\right)$　　D.$\left(\dfrac{3}{4},1\right)$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9.已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\left\{x|\dfrac{x-1}{x-2}<0\right\}$，则关于 $\complement_U A$ 的表达方式正确的有（　　）

A.$\left(-\infty,1\right]\cup\left[2,+\infty\right)$　　B.$\left\{x|\left(x-2\right)\left(x-1\right)\geqslant 0\right\}$

C.$\left\{x|\dfrac{x-1}{x-2}\geqslant 0\right\}$　　D.$\left(-\infty,1\right)\cup\left(2,+\infty\right)$

10.已知圆 $O:x^2+y^2=9,P,Q$ 为圆 O 上任意两点(不重合),平面上一动点 C 满足 $\overrightarrow{CP}=\lambda\overrightarrow{CQ}(\lambda>0)$.若 M 为线段 PQ 的中点，则 $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OM}$ 的取值可能为（　　）

A.7　　B.8　　C.9　　D.10

11.已知复数 $z_1=-2+\mathrm{i}$(i 为虚数单位) 在复平面内的对应的点为 A，复数 z_2 满足 $\left|z_2-1+\mathrm{i}\right|=2,z_2$ 在复平面内

对应的点 B 为 (x,y)，则下列结论正确的有（　　）

A.复数 z_1 的虚部为 i

B. $(x-1)^2+(y+1)^2=4$

C. $|z_1-z_2|$ 的最大值 $\sqrt{13}+2$

D. $|z_1+z_2|$ 的最小值为 $\sqrt{13}-2$

12.设函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{e^x}(x\geqslant 0), e=2.71828\cdots$，则（　　）

A. $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增

B. $f(x)$ 的最大值为 $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$，最小值为 $f\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)$

C.方程 $f(x)=\dfrac{1}{x}(x>0)$ 有无数个解

D.若 $f(x)\leqslant kx$ 恒成立，则 $k_{\min}=1$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13.直线 $l_1: x+y-1=0$ 与直线 $l_2: x+y-3=0$ 间的距离为__________.

14.等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_3+a_{15}=12$，则 a_9 的最大值为__________.

15.已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点 F_2 的坐标为 $(2,0), \dot{F}_1$ 为椭圆 C 的左焦点，P 为椭圆上一点，若 $\tan\angle F_1PF_2=\dfrac{4}{3}, S_{\Delta PF_1F_2}=6$，则椭圆 C 方程为__________.

16.函数 $f(x)=\ln x+b(b\in\mathbf{R})$

（1）当 $b=1$ 时，过原点 O 的函数 $f(x)$ 的切线方程为__________.

（2）当 $b=e-1$ 时，若数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=1, a_{n+1}=f(a_n)$.

判断下列命题是否正确，正确的在括号内画“√"，错误的画“×”.

① $\forall n\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_n<a_{n+1}$（　　）

② $\exists n\in\mathbf{N}^*$，使得 $a_n=e$（　　）

③ $\exists n\in\mathbf{N}^*$，使得 $a_n>e$（　　）

四、解答题.本题共 6 小题共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10 分）在正项等比数列$\left\{a_n\right\}$中，$a_1=1,a_7=64$.

（1）求数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式；

（2）若$T_n=a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n$，求$T_n$.

18.（12 分）已知函数$f\left(x\right)=\sin\left(\pi-\omega x\right)\cos\omega x-\cos^2\left(\omega x+\dfrac{\pi}{4}\right)(\omega>0)$的最小正周期为$\pi$.

（1）求$f\left(x\right)$图象的对称轴方程；

（2）将$f\left(x\right)$图象向右平移$\dfrac{\pi}{6}$个单位长度后，得到函数$g\left(x\right)$，求函数$g\left(x\right)$在$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上的值域.

19.（12 分）已知点P在圆$C:x^2+y^2+2x-4y+1=0$上运动，点$Q\left(3,0\right)$，线段PQ的中点M的轨迹为曲线Γ.

（1）求曲线Γ的方程；

（2）过点$N\left(2,3\right)$是否存在直线l与曲线Γ有且只有一个交点，若存在，求出直线l的方程；若不存在，请说明理由.

20.（12 分）中华民族是一个历史悠久的民族，在泱泱五千年的历史长河中，智慧的华夏民族在很多领域都给人类留下了无数的瑰宝.比如，在数学领域中：十进位制记数法和零的采用；二进位制思想起源；几何思想起源；勾股定理（商高定理）；幻方；分数运算法则和小数；负数的发现；盈不是术；方程术；最精确的圆周率--“祖率”；等积原理--“祖暅”原理；二次内插法；增乘开方法；杨辉三角；中国剩余定理；数字高次方程方法--“天元术”；招差术……，这些累累硕果都是华夏民族的祖先们为人类的智慧宝库留下的珍贵财富.近代中国数学也在一直向前发展，涌现了苏步青、华罗庚、陈省身、吴文俊、陈景润、丘成桐等国际顶尖数学大师，他们在微分几何学、计算几何学、中国解析数论、矩阵几何学、典型群、自安函数论、整体微分几何、几何定理机械化证明、拓扑学、哥德巴赫猜想研究、几何分析等诸多领域取得了杰出成就.这些数学成就和数学大师激励了一代代华夏儿女自强不息，奋勇前进.为增强学生的民族自豪感，培养学生热爱科学、团结协作、热爱祖国的优良品德，以及培养学生的思维品质，改变学生的思维习惯，提高学生对数学学习的兴趣，某中学在该校高一年级开设了选修课《中国数学史》.经过一年的学习，为了解同学们在数学史课程的学习后，学习数学的兴趣是否浓厚，该校随机抽取了 200 名高一学生进行调查，得到统计数据如下：

	对数学兴趣浓厚	对数学兴趣薄弱	合计
选学了《中国数学史》	100	20	120
末选学《中国数学史》	x	y	n
合计	160	m	200

（1）求2×2列联表中的数据x,y,m,n的值，并确定能否有85%的把握认为对数学兴趣浓厚与选学《中国数

学史》课程有关.

（2）在选学了《中国数学史》的 120 人中按对数学是否兴趣浓厚，采用分层随机抽样的方法抽取 12 人，再从 12 人中随机抽取 3 人做进一步调查.若初始总分为 10 分，抽到的 3 人中，每有一人对数学兴趣薄弱减 1 分，每有一人对数学兴趣浓厚加 2 分.设得分结果总和为 X，求 X 的分布列和数学期望.

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(a+c)(c+d)(b+d)}, n=a+b+c+d$.

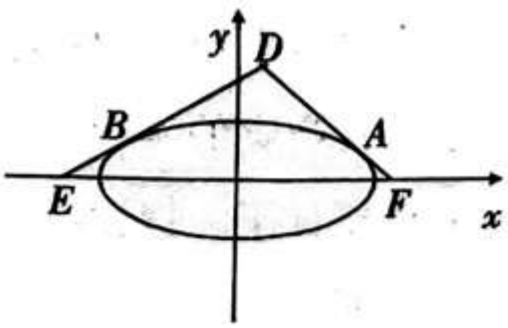
$P\left(K^2\geqslant k_0\right)$	0.150	0.100	0.050	0.025	0.010
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635

21.（12 分）已知函数 $f\left(x\right)=ax\cos x-2\sin x$，其中 $a\in\mathbf{R}$.

（1）当 $a=2$ 时，讨论 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,2\pi\right)$ 上的单调性；

（2）若对任意 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 都有 $f\left(x\right)<3x$，求实数 a 的取值范围.

22.（12 分）已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.



（1）若 $P\left(x_0,y_0\right)$ 在椭圆 C 上，证明：直线 $\dfrac{x_0x}{4}+y_0y=1$ 与椭圆 C 相切；

（2）如图，A,B 分别为椭圆 C 上位于第一、二象限内的动点，且以 A,B 为切点的椭圆 C 的切线与 x 轴围成 $\triangle DEF$.求 $S_{\triangle DEF}$ 的最小值.

重庆市高 2022 届高三第四次质量检测

数学试题参考答案与评分细则

一、单项选择题

1-8CAABCDDB

8.解：由角平分线性质可知 $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}=\frac{a-c}{c}$，代入 $b^2=a^2-c^2$ 可得 $\frac{a^2-c^2}{a^2-c^2}=\frac{a^2-2ac+c^2}{c^2}$，故

$\frac{2-e^2}{1-e^2}=\frac{1-2e+e^2}{e^2}\Leftrightarrow 2e^3-2e^2-2e+1=0$，由函数的零点存在性定理可知 $e\in\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$，故选 B.

二、多项选择题

9.AB　10.AB　11.BC　12.BD

12.解：$\because f'(x)=\frac{\cos x-\sin x}{e^x}$，$\therefore f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 单调递增，$\left(2k\pi+\frac{\pi}{4},2k\pi+\frac{5\pi}{4}\right)k\in\mathbf{N}$ 单调递减，

$\left(2k\pi+\frac{5\pi}{4},2k\pi+\frac{9\pi}{4}\right)k\in\mathbf{N}$ 单调递增，$\therefore$ A 错，B 正确

C.当 $x>0$ 时，$\sin x\leqslant 1, e^x\geqslant ex$，则 $\frac{\sin x}{e^x}\leqslant\frac{1}{e^x}\leqslant\frac{1}{ex}<\frac{1}{x}$，从市 $f(x)=\frac{1}{x}(x>0)$ 无解，$\therefore$ C 错.

D. $f(x)$ 图象始炆位丁它在原点处的切线下方，$k_{\min}=f'(0)=1$，故正确

三、填空题

13. $\sqrt{2}$　14. 6　15. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$　16.（1）$y=x$；（2）①√ ②× ③×.

16.解：（1）当 $b=1$ 时，$f(x)=\ln x+1, f'(x)=\frac{1}{x}$；

设切点为 $(x_0,\ln x_0+1)$，则切线为 $y-(\ln x_0+1)=\frac{1}{x_0}(x-x_0)$，

由切线过点 $(0,0)$，则 $0-(\ln x_0+1)=\frac{1}{x_0}(-x_0)\Rightarrow x_0=1$，故切线方程为 $y=x$.

（2）当 $b=e-1$ 时，$f(x)=\ln x+e-1$，则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

由 $a_2=e-1>a_1$，则 $f(a_1)<f(a_2)\Rightarrow a_2<a_3\Rightarrow f(a_2)<f(a_3)\Rightarrow a_3<a_4\to\cdots\Rightarrow a_n<a_{n+1}$，故①对；

令 $g(x)=x-\ln x$，则 $g'(x)=1-\frac{1}{x}$，故 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

若 $a_n=e$，则 $a_{n+1}=\ln a_n+e-1=e=a_n$，与 $a_n<a_{n+1}$ 矛后，故②错；

若 $a_n>e$，由 $g(x)$ 的单调性，则 $a_n-\ln a_n>e-1$，即 $a_n>a_{n+1}$，与 $a_n<a_{n+1}$ 矛盾，故③错.

四、解答题

17.解：（1）设公比为 q，则 $a_7=a_1q^6=64$, 由 $\begin{cases}a_1=1\\a_n>0\end{cases}$ 可得，$q=2$

$\therefore a_n = 2^{n-1}$.

（2）由（1）可知$T_n = 1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 2^2 + \cdots + (n-1)\cdot 2^{n-2} + n\cdot 2^{n-1}$

$\therefore 2T_n = 1\cdot 2 + 2\cdot 2^2 + 3\cdot 2^3 + \cdots + (n-1)\cdot 2^{n-1} + n\cdot 2^n$

两式相减得：$-T_n = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} - n\cdot 2^n = \dfrac{1-2^n}{1-2} - n\cdot 2^n$

$\therefore T_n = (n-1)2^n + 1$.

18.解：（1）$f(x) = \sin\omega x\cos\omega x - \dfrac{1+\cos\left(2\omega x + \dfrac{\pi}{2}\right)}{2} = \dfrac{\sin 2\omega x}{2} - \dfrac{1-\sin 2\omega x}{2} = \sin 2\omega x - \dfrac{1}{2}$

$\because T = \dfrac{2\pi}{2\omega} = \pi$，$\therefore \omega = 1$.$\therefore f(x) = \sin 2x - \dfrac{1}{2}$

由$2x = k\pi + \dfrac{\pi}{2}$可得：$x = \dfrac{k\pi}{2} + \dfrac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}$

$\therefore f(x)$图象的对称轴方程为$x = \dfrac{k\pi}{2} + \dfrac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}$

（2）$g(x) = \sin\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) - \dfrac{1}{2}$，

$\because x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$，$\therefore 2x - \dfrac{\pi}{3} \in \left[-\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}\right]$，$\therefore \sin\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) \in \left[-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$

$\therefore g(x) \in \left[-\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$

19.解：（1）设$M(x, y)$，则$P(2x-3, 2y)$

$\because P$在圆C上

$\therefore (2x-3)^2 + 4y^2 + 2(2x-3) - 8y + 1 = 0$，整理得：$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$

$\therefore$曲线Γ的方程为$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$.

（2）当l斜率不存在时，$l: x = 2$符合条件；

当l斜率存在时，设直线l方程为$y = k(x-2) + 3$，则$\dfrac{|-k+2|}{\sqrt{1+k^2}} = 1$，解得$k = \dfrac{3}{4}$.

$\therefore$满足条件的直线l存在，直线l的方程为：$x = 2$或$y = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{3}{2}$.

20.解：（1）由题意得：$x = 60, y = 20, m = 40, n = 80$.

从亩 $K^2=\frac{200\times(100\times20-20\times60)^2}{160\times40\times120\times80}=\frac{25}{12}\approx2.083>2.072$

所以，有 85% 的把握认为对数学兴趣浓厚与选学数学史课程有关.

（2）在选学了数劳史的 120 人中按对数学是否兴趣浓厚，采用分层随机抽样的方法抽取 12 人，可知其中对数学兴趣依孚有 10 人，对数学兴趣薄弱有 2 人，再从 12 人中抽取 3 人，当这 3 人中恰有 2 人对数学兴趣薄弱时，$X=10$；当这 3 人中恰有 1 人对数学兴趣薄弱时，$X=13$；当这 3 人都对数学兴趣浓厚时，$X=16$

故：$P(X=10)=\frac{C_2^2C_{10}^1}{C_{12}^3}=\frac{1}{22},P(X=13)=\frac{C_2^1C_{10}^2}{C_{12}^3}=\frac{9}{22},P(X=16)=\frac{C_2^0C_{10}^3}{C_{12}^3}=\frac{6}{11}$

所以 X 的分布列为：

X	10	13	16
P	$\frac{1}{22}$	$\frac{9}{22}$	$\frac{6}{11}$

X 的数学期望为：$E(X)=10\times\frac{1}{22}+13\times\frac{9}{22}+16\times\frac{6}{11}=\frac{29}{2}$.

21.解：（1）当 $a=2$ 时，$f(x)=2x\cos x-2\sin x$，则 $f'(x)=-2x\sin x$，故当 $x\in(0,\pi)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(\pi，2\pi)$ 时，$f'(x)>0$.

所以，$f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上单调递增，在 $(\pi,2\pi)$ 上单调递减.

（2）令 $g(x)=3x+2\sin x-ax\cos x$，则 $g'(x)=3+(2-a)\cos x+ax\sin x$.

当 $a\leqslant0$ 时，$ax\cos x\leqslant0$，所以 $g(x)>g(0)=0$.

当 $0<a\leqslant5$ 时，$g'(x)\geqslant3-3\cos x+ax\sin x>0$，故 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增.

又 $g(0)=0$，故 $g(x)>g(0)=0$.

当 $a>5$ 时，$g''(x)=(2a-2)\sin x+ax\cos x>0$，故 $g'(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增.

$X_{g'}(0)=5-a<0,g'\left(\frac{\pi}{2}\right)=3+\frac{a\pi}{2}>0.$

故存在 $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 使得 $g'(x_0)=0$，且当 $x\in(0,x_0)$ 时 $g'(x)<0$，即 $g(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，所以当 $x\in(0,x_0)$ 时，$g(x)<g(0)=0$.

综上，$a\leqslant5$.

21.解：（1）联立$\begin{cases}\dfrac{x_0x}{4}+y_0y=1\\x^2+4y^2=4\end{cases}$，消去$y$可得：$x^2y_0^2+4\left(1-\dfrac{xx_0}{4}\right)^2=4y_0^2$，结合$\dfrac{x_0^2}{4}+y_0^2=1$整理得：

$x^2-2xx_0+4-4y_0^2=0$.

$\because \Delta=4x_0^2+16y_0^2-16=0$

$\therefore$直线$\dfrac{x_0x}{4}+y_0y=1$与椭圆C相切.

（2）设直线$AB: y=kx+m, A\left(x_1,y_1\right), B\left(x_2,y_2\right)$.

由（1）可知：直线$DA:\dfrac{x_1x}{4}+y_1y=1$，直线$DB:\dfrac{x_2x}{4}+y_2y=1$，所以$E\left(\dfrac{4}{x_2},0\right),F\left(\dfrac{4}{x_1},0\right)$.

由$\begin{cases}\dfrac{x_1x}{4}+y_1y=1\\\dfrac{x_2x}{4}+y_2y=1\end{cases}$可得：$y_D=\dfrac{x_2-x_1}{x_2y_1-x_1y_2}$

$\therefore S_{\triangle DEF}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{x_2-x_1}{x_2y_1-x_1y_2}\times\left(\dfrac{4}{x_1}-\dfrac{4}{x_2}\right)=\dfrac{2\left(x_1-x_2\right)^2}{x_1x_2\left(x_2y_1-x_1y_2\right)}=\dfrac{2\left(x_2-x_1\right)}{mx_1x_2}$.

联立$\begin{cases}y=kx+m\\x^2+4y^2=4\end{cases}$可得：$\left(1+4k^2\right)x^2+8kmx+4m^2-4=0$，所以$\begin{cases}x_1+x_2=-\dfrac{8km}{1+4k^2}\\x_1x_2=\dfrac{4\left(m^2-1\right)}{1+4k^2}\end{cases}$，且

$\Delta=16\left(4k^2+1-m^2\right)>0$，即：$4k^2+1>m^2$.

$\therefore S_{\triangle JEF}^2=\dfrac{4\left(x_1-x_2\right)^2}{m^2\left(x_1x_2\right)^2}=\dfrac{4\left(4k^2+1-m^2\right)}{m^2\left(1-m^2\right)^2}\geqslant\dfrac{4\left(1-m^2\right)}{m^2\left(1-m^2\right)^2}=\dfrac{4}{m^2\left(1-m^2\right)}\geqslant 16$

$\therefore S_{\triangle DEF}\geqslant 4$，当$k=0,m=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$时取得等号，即$S_{\triangle DEF}$的最小值为4.