函数与导数

1.已知函数 $f(x)=\begin{cases}2-|x+1|, x\le 1\\ (x-1)^2, x>1\end{cases}$，函数 $g(x)=f(x)+f(-x)$，则不等式 $g(x)\leqslant 2$ 的解集为__________.

2.在同一坐标系中，直线 l 是函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ 的图象在点 $(0,1$ 处的切线，若直线 l 也是 $g(x)=-x^2+mx$ 的切线，则 $m=$__________.

3. $f(x)$ 是定义在 R 上的函数，其导函数为 $f'(x)$，若 $f(x)-f'(x)>1$，$f(1)=2018$，则不等式 $f(x)>2017\cdot e^{x-1}+1$（其中 e 为自然对数的底数）的解集为______.

4. 已知函数 $f(x)=ax^2+x-x\ln x(a\in R)$

（1）若函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,求实数 a 的取值范围；

（2）若函数 $f(x)$ 有两个极值点 $x_1,x_2(x_1\ne x_2)$,证明：$x_1x_2>e^2$.

1.答案 [-2,2] 2. ±2 3. $(-\infty,1)$

【解析】（1）$f'(x)=2ax+1-\ln x-1=2ax-\ln x(x>0)$,

依题意知：$f'(x)\geq 0$在$(0,+\infty)$上恒成立,即$2a\geq\frac{\ln x}{x}(x>0)$.

令$g(x)=\frac{\ln x}{x}(x>0)$,则$g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}=\frac{\ln e-\ln x}{x^2}(x>0)$,

知$g(x)$在$(0,e)$单调递增,在$(e,+\infty)$单调递减,

4. $g(x)_{\max}=g(e)=\frac{1}{e}$,于是$2a\geq\frac{1}{e}$,即$a\geq\frac{1}{2e}$.

（2）依题意知$x_1,x_2(x_1<x_2)$是方程$2ax-lnx=0(x>0)$的两个根,

即$2ax_1-lnx_1=0,2ax_2-lnx_2=0,(0<x_1<x_2)$,

可得$2a(x_1+x_2)=lnx_1+lnx_2,2a(x_1-x_2)=lnx_1-lnx_2$.

所以$lnx_1+lnx_2=\frac{x_1+x_2}{x_1-x_2}ln\frac{x_1}{x_2}=\frac{\frac{x_1}{x_2}+1}{\frac{x_1}{x_2}-1}ln\frac{x_1}{x_2}(0<x_1<x_2)$.

欲证$x_1x_2>e^2$,只要证$lnx_1+lnx_2>2\Leftrightarrow\left(\frac{x_1}{x_2}+1\right)ln\frac{x_1}{x_2}<2\left(\frac{x_1}{x_2}-1\right)(0<x_1<x_2)$,

令$h(t)=(t+1)lnt+-2(t-1)(0<t<1)$,只要$h(t)<0$即可.

则$h'(t)=lnt+\frac{1}{t}-1(0<t<1)$,

再令$\phi(t)=lnt+\frac{1}{t}-1(0<t<1)$,则$\varphi'(t)=\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}=\frac{t-1}{t^2}<0$.

可知：$\varphi(t)=h'(t)$在$(0,1)$上递减,可知$h'(t)>h'(1)=0$,即$h(t)$在$(0,1)$上递增,

有$h(t)<h(1)=0$,

综上可知：$x_1x_2>e^2$.