

## 卷 01-期末全真模拟卷一

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 复数  $\frac{2+i}{1-i}$  的共轭复数是( )

- A.  $\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$       B.  $\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$       C.  $-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$       D.  $-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$

【答案】A

【解析】： $\frac{2+i}{1-i} = \frac{(2+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$ ,

所以复数  $\frac{2+i}{1-i}$  的共轭复数是  $\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$ .

故选 A.

2. 甲、乙等 5 人在 9 月 3 号参加了纪念抗日战争胜利 70 周年阅兵庆典后，在天安门广场排成一排拍照留念，甲和乙必须相邻且都不站在两端的排法有( )

- A. 12 种      B. 24 种      C. 48 种      D. 120 种

【答案】B

【解析】甲乙相邻，将甲乙捆绑在一起看作一个元素，共有  $A_4^4 A_2^2$  种排法，

甲乙相邻且在两端有  $C_2^1 A_3^3 A_2^2$  种排法，

故甲乙相邻且都不站在两端的排法有  $A_4^4 A_2^2 - C_2^1 A_3^3 A_2^2 = 24$  (种)，

故选 B.

3. 已知曲线  $C_1: f(x) = \ln x + \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}$  和  $C_2: g(x) = -ax^2 + bx + 1$  在交点  $(1, f(1))$  处具有相同的切线方程，则  $ab$  的值为( )

- A. -1      B. 0      C. -6      D. 6

【答案】D

【解答】

解：  $f'(x) = \frac{1}{x} + x - 1$ ,  $g'(x) = -2ax + b$ ，又因为  $f(x)$  与  $g(x)$  在交点  $(1, f(1))$  处具有相同的切线方程，

所以  $\begin{cases} f(1) = g(1) \\ f'(1) = g'(1) \end{cases}$ ，即  $\begin{cases} -a + b + 1 = 0 \\ -2a + b = 1 \end{cases}$ ，解得  $a = -2, b = -3$ ，

所以  $ab = 6$ .

故选 D.



4. 下表是离散型随机变量  $X$  的分布列，则常数  $a$  的值是 ( )

|     |               |                 |               |               |
|-----|---------------|-----------------|---------------|---------------|
| $X$ | 3             | 4               | 5             | 9             |
| $P$ | $\frac{a}{2}$ | $\frac{1}{6}+a$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{6}$ |

- A.  $\frac{1}{6}$                       B.  $\frac{1}{12}$                       C.  $\frac{1}{9}$                       D.  $\frac{1}{2}$

【答案】C

【详解】

$$\frac{a}{2} + \frac{1}{6} + a + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 1, \text{ 解得 } a = \frac{1}{9}.$$

故选：C

5. 下列命题错误的是

- A. 两个随机变量的线性相关性越强，相关系数的绝对值越接近于 1  
B. 设  $\xi \sim N(0, \sigma^2)$ ，且  $P(\xi < -1) = \frac{1}{4}$ ，则  $P(0 < \xi < 1) = \frac{1}{2}$   
C. 在残差图中，残差点分布的带状区域的宽度越狭窄，其模型拟合的精度越高  
D. 已知变量  $x$  和  $y$  满足关系  $y = 1 - 0.1x$ ，变量  $y$  与  $z$  正相关，则  $x$  与  $z$  负相关

【答案】B

【详解】对于 A，根据相关系数的意义知，A 正确

对于 B，由  $\xi \sim N(0, \sigma^2)$ ，知  $\mu = 0$ ，概率密度函数的图象关于  $x = 0$  对称

$$\text{故 } P(\xi < -1) = \frac{1}{4} = P(\xi > 1), \quad P(-1 < \xi < 1) = 1 - 2 \times P(0 < \xi < 1) = \frac{1}{2}$$

$$\text{所以 } P(0 < \xi < 1) = \frac{1}{2} \cdot P(-1 < \xi < 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}, \text{ 故 B 错误}$$

对于 C，根据残差图的意义，C 正确

对于 D，变量  $x$  和  $y$  满足关系  $y = 1 - 0.1x$ ，所以  $y$  和  $x$  负相关，因为  $y$  与  $z$  正相关，所以  $x$  与  $z$  负相关，故

D 正确

故选：B

6. 随机变量  $X$  服从正态分布  $X \sim N(10, \sigma^2)$ ， $P(X > 12) = m$ ， $P(8 \leq X \leq 10) = n$ ，则  $\frac{2}{m} + \frac{1}{n}$  的最小值为 ( ).



A.  $3 + 4\sqrt{2}$

B.  $6 + 2\sqrt{2}$

C.  $8 + 2\sqrt{2}$

D.  $6 + 4\sqrt{2}$

【答案】D

【解答】 ∵ 随机变量  $X$  服从正态分布  $X \sim N(10, \delta^2)$ ,  $P(X > 12) = m$ ,  $P(8 \leq X \leq 10) = n$ ,

$$\therefore P(10 \leq X < 12) = n,$$

$$\therefore m + n = \frac{1}{2}, \text{ 且 } m > 0, n > 0$$

$$\therefore \frac{2}{m} + \frac{1}{n} = 2 \left( \frac{2}{m} + \frac{1}{n} \right) (m + n),$$

$$= 2 \left( 3 + \frac{2n}{m} + \frac{m}{n} \right),$$

$$\geq 2 \left( 3 + 2\sqrt{\frac{2n}{m} \cdot \frac{m}{n}} \right),$$

$$= 2(3 + 2\sqrt{2}),$$

$$= 6 + 4\sqrt{2},$$

当且仅当  $\frac{2n}{m} = \frac{m}{n}$  时, 即  $m = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ ,  $n = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$  等号成立,

$\therefore \frac{2}{m} + \frac{1}{n}$  的最小值为  $6 + 4\sqrt{2}$ . 故选 D.

7. 回文联是我国对联中的一种.用回文形式写成的对联,既可顺读,也可倒读.不仅意思不变,而且颇具趣味.相传,清代北京城里有一家饭馆叫“天然居”,曾有一副有名的回文联:“客上天然居,居然天上客;人过大佛寺,寺佛大过人.”在数学中也有这样一类顺读与倒读都是同一个数的自然数,称之为“回文数”.如 44, 585, 2662 等;那么用数字 1, 2, 3, 4, 5, 6 可以组成 4 位“回文数”的个数为 ( )

A. 30

B. 36

C. 360

D. 1296

【答案】B

【详解】

由题意知: 组成 4 位“回文数”

$\therefore$  当由一个数组成回文数, 在 6 个数字中任取 1 个:  $C_6^1$  种



当有两组相同的数，在 6 个数字中任取 2 个： $C_6^2$  种

又 $\because$ 在 6 个数字中任取 2 个时，前两位互换位置又可以组成另一个数

$\therefore$  2 个数组成回文数的个数： $A_2^2$  种

故，在 6 个数字中任取 2 个组成回文数的个数： $C_6^2 A_2^2$

综上，有数字 1, 2, 3, 4, 5, 6 可以组成 4 位“回文数”的个数为： $C_6^2 A_2^2 + C_6^1 = 36$

故选：B

8. 设函数  $f(x) = x \ln x$ ,  $g(x) = \frac{f'(x)}{x}$ , 给定下列命题

① 不等式  $g(x) > 0$  的解集为  $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ ;

② 函数  $g(x)$  在  $(0, e)$  单调递增, 在  $(e, +\infty)$  单调递减;

③  $x \in \left[\frac{1}{e}, 1\right]$  时, 总有  $f(x) < g(x)$  恒成立;

④ 若函数  $F(x) = f(x) - ax^2$  有两个极值点, 则实数  $a \in (0, 1)$ .

则正确的命题的个数为

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】B

【详解】

$\because$  函数  $f(x) = x \ln x$ ,  $\therefore f'(x) = \ln x + 1$

则  $g(x) = \frac{\ln x + 1}{x}$ ,  $g'(x) = \frac{1 - \ln x - 1}{x^2} = -\frac{\ln x}{x^2}$

对于①,  $g(x) > 0$  即  $\frac{\ln x + 1}{x} > 0$ ,  $\ln x + 1 > 0$ , 即  $x > \frac{1}{e}$ , 故正确

对于②,  $g'(x) = -\frac{\ln x}{x^2}$ , 当  $x \in (0, 1)$  时  $g'(x) > 0$ ,  $g(x)$  单调递增, 故错误

对于③, 当  $x \in \left[\frac{1}{e}, 1\right]$  时, 若  $f(x) < g(x)$ , 则  $f(x) - g(x) < 0$

即  $x \ln x - \frac{\ln x + 1}{x} < 0$ , 即  $x^2 \ln x - \ln x - 1 < 0$ ,

令  $F(x) = x^2 \ln x - \ln x - 1$ , 则  $F'(x) = 2x \ln x + x - \frac{1}{x}$ ,  $F''(x) = 2 \ln x + 2 + 1 + \frac{1}{x^2}$



当  $x \in \left[\frac{1}{e}, 1\right]$  时， $F''(x) > 0$ ，则  $F'(x)$  单调递增

$F'(1) = 0 + 1 - 1 = 0$ ，则  $F'(x) \leq 0$ ， $F(x)$  单调递减

$F\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e^2} + 1 - 1 = -\frac{1}{e^2} < 0$ ，故  $f(x) - g(x) < 0$ ， $f(x) < g(x)$ ，故正确

对于④，若函数  $F(x) = f(x) - ax^2$  有两个极值点，则  $F'(x) = f'(x) - 2ax$  有两个零点

即  $\ln x + 1 - 2ax = 0$ ， $2a = \frac{\ln x + 1}{x}$

令  $G(x) = \frac{\ln x + 1}{x}$ ， $G'(x) = -\frac{\ln x}{x^2}$ ， $G(x)$  在  $(0, 1)$  上单调递增，在  $(1, +\infty)$  上单调递减

$G(1) = 1$ ，即  $2a \in (0, 1)$ ， $a \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ ，故错误

综上，只有①③正确

故选 B

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中。有多项符合题目要求。

全部选对的得 5 分，部分选对的对 2 分，有选错的得 0 分。

9. 在  $\left(x - \frac{1}{x}\right)^6$  的展开式中，下列说法正确的有（ ）

A. 所有项的系数和为 0

B. 所有项的系数绝对值和为 64

C. 常数项为 20

D. 系数最大的项为第 4 项

【答案】AB

【详解】

令  $x = 1$  可得  $\left(x - \frac{1}{x}\right)^6$  的展开式中所有项的系数和为  $(1 - 1)^6 = 0$ ，A 正确；

因为  $\left(x - \frac{1}{x}\right)^6 = C_6^0 x^6 + C_6^1 x^5 \left(-\frac{1}{x}\right) + \cdots + C_6^6 \left(-\frac{1}{x}\right)^6$ ，所以展开式中所有项的系数绝对值和为

$C_6^0 + C_6^1 + \cdots + C_6^6 = 2^6 = 64$ ，B 正确；

通项为  $C_6^r (-1)^r x^{6-2r}$ ，令  $6 - 2r = 0$ ，解得  $r = 3$ ，所以  $\left(x - \frac{1}{x}\right)^6$  的展开式中常数项为  $C_6^3 (-1)^3 = -20$ ，C



错误；

因为  $\left(x - \frac{1}{x}\right)^6 = C_6^0 x^6 + C_6^1 x^5 \left(-\frac{1}{x}\right) + \cdots + C_6^6 \left(-\frac{1}{x}\right)^6$ ，各项的系数分别为

$C_6^0, -C_6^1, C_6^2, -C_6^3, C_6^4, -C_6^5, C_6^6$ ，展开式系数最大的为  $C_6^2 = 15, C_6^4 = 15$ ，

是第 3 项或第 5 项，D 错误.

故选：AB.

10. 已知  $i$  为虚数单位，则下列选项中正确的是 ( )

A. 复数  $z = 3 + 4i$  的模  $|z| = 5$

B. 若复数  $z = 3 + 4i$ ，则  $\bar{z}$  (即复数  $z$  的共轭复数) 在复平面内对应的点在第四象限

C. 若复数  $(m^2 + 3m - 4) + (m^2 - 2m - 24)i$  是纯虚数，则  $m = 1$  或  $m = -4$

D. 对任意的复数  $z$ ，都有  $z^2 \geq 0$

【答案】AB

【详解】

对于 A，复数  $z = 3 + 4i$  的模  $|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ ，故 A 正确；

对于 B，若复数  $z = 3 + 4i$ ，则  $\bar{z} = 3 - 4i$ ，在复平面内对应的点的坐标为  $(3, -4)$ ，在第四象限，故 B 正确；

对于 C，若复数  $(m^2 + 3m - 4) + (m^2 - 2m - 24)i$  是纯虚数，

则  $\begin{cases} m^2 + 3m - 4 = 0 \\ m^2 - 2m - 24 \neq 0 \end{cases}$ ，解得  $m = 1$ ，故 C 错误；

对于 D，当  $z = i$  时， $z^2 = -1 < 0$ ，故 D 错误.

故选：AB.

11. 下列说法中，正确的命题是 ( )

A. 已知随机变量  $\xi$  服从正态分布  $N(2, \delta^2)$ ， $P(\xi < 4) = 0.84$ ，则  $P(2 < \xi < 4) = 0.34$ .

B. 以模型  $y = ce^{kx}$  去拟合一组数据时，为了求出回归方程，设  $z = \ln y$ ，将其变换后得到线性方程  $z = 0.3x + 4$ ，则  $c, k$  的值分别是  $e^4$  和 0.3.

C. 已知两个变量具有线性相关关系，其回归直线方程为  $y = a + bx$ ，若  $b = 2, \bar{x} = 1, \bar{y} = 3$ ，则  $a = 1$ .

D. 若样本数据  $x_1, x_2, \dots, x_{10}$  的方差为 2，则数据  $2x_1 - 1, 2x_2 - 1, \dots, 2x_{10} - 1$  的方差为 16.



【答案】ABC

【解答】

解：A 正确，随机变量  $\xi$  服从正态分布  $N(2, \sigma^2)$ ，

若  $P(\xi < 4) = 0.84$ ，则  $P(\xi < 0) = P(\xi > 4) = 0.16$ 。

则  $P(2 < \xi < 4) = \frac{1}{2}(0.84 - 0.16) = 0.34$ 。

B 正确， $\because y = ce^{kx}$ ， $\therefore$  两边取对数，

可得  $\ln y = \ln(ce^{kx}) = \ln c + \ln e^{kx} = \ln c + kx$ ，

令  $z = \ln y$ ，可得  $z = \ln c + kx$ ，

$\because z = 0.3x + 4$ ， $\therefore \ln c = 4$ ， $k = 0.3$ ， $\therefore c = e^4$ 。

C 正确，因为回归直线方程  $y = a + bx$  必过样本中心  $(1, 3)$ ，

所以  $3 = a + 2 \times 1$ ，解得  $a = 1$ 。

D 错误，由方差的性质得：数据  $2x_1 - 1, 2x_2 - 1, \dots, 2x_{10} - 1$  的方差为： $s^2 = 2^2 \times 2 = 8$ 。

故选 ABC。

12. 已知函数  $f(x) = e^x - a \ln x$  的定义域是  $D$ ，有下列四个命题，其中正确的有( )

A. 对于  $\forall a \in (-\infty, 0)$ ，函数  $f(x)$  在  $D$  上是单调增函数

B. 对于  $\forall a \in (0, +\infty)$ ，函数  $f(x)$  存在最小值

C. 存在  $a \in (-\infty, 0)$ ，使得对于任意  $x \in D$ ，都有  $f(x) > 0$  成立

D. 存在  $a \in (0, +\infty)$ ，使得函数  $f(x)$  有两个零点

【答案】ABD

【解答】

易求得函数定义域为  $(0, +\infty)$ ， $f'(x) = e^x - \frac{a}{x}$ ；

A、若  $a \in (-\infty, 0)$ ，则  $f'(x) = e^x - \frac{a}{x} > 0$ ，则  $f(x)$  为定义域上增函数，故 A 正确；

B、若  $a \in (0, +\infty)$ ，则存在  $x_0$ ，使得  $f'(x_0) = e^{x_0} - \frac{a}{x_0} = 0$ ，设  $g(x) = e^x - \frac{a}{x}$ ，

则  $g'(x) = e^x + \frac{a}{x^2} > 0$ ，则  $f'(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增，

则当  $x \in (0, x_0)$  时， $f'(x) < 0$ ，

当  $x \in (x_0, +\infty)$  时， $f'(x) > 0$ ，

则  $f(x)$  在  $(0, x_0)$  上单调递减，在  $(x_0, +\infty)$  上单调递增，



故函数  $f(x)$  在  $x = x_0$  处取得最小值，故  $B$  正确；

$C$ 、由  $a < 0$ ，当  $x > 0$  且  $x \rightarrow 0$  时，

$$e^x \rightarrow 1, a \ln x \rightarrow +\infty,$$

即  $f(x) < 0$ ， $C$  不正确；

$D$ 、由上述分析可知， $a > 0$  时， $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上存在最小值，

当  $x > 0$  且  $x \rightarrow 0$  时， $f(x) > 0$ ，

当  $x \rightarrow +\infty$  时，由于指数函数比对数函数增加的快，

故  $f(x) > 0$ ，因此，当  $f(x)$  的最小值小于 0 时，

$f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上有两个零点，

$$\text{考虑 } a = 5e^5, \text{ 此时 } f'(5) = e^5 - \frac{5e^5}{5} = 0,$$

$$\text{此时 } f(x) \text{ 的最小值为 } f(5) = e^5 - 5e^5 \ln 5 < 0,$$

故  $f(x)$  有两个零点，

故  $D$  正确；

故选  $ABD$ 。

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 我国第一艘航母“辽宁舰”在某次舰载机起降飞行训练中，有 5 架舰载机准备着舰。如果甲、乙两机必须相邻着舰，丙、丁两机也必须相邻着舰，那么不同的着舰方法有\_\_\_\_\_种。

【答案】24

【详解】

对甲，乙两机进行排列为  $A_2^2$ ，对丙，丁两机进行排列为  $A_2^2$

然后把甲乙当成一个元素，丙丁当成一个元素，3 个元素进行排列，有  $A_3^3$  种

根据分步计数原理可得满足要求的一共有  $A_2^2 A_2^2 A_3^3 = 24$  种

故答案为：24

【点睛】

本题考查分布计数原理，以及捆绑法，属于基础题。

14. 已知  $x$ ， $y$  的取值如表：

|     |   |   |   |   |
|-----|---|---|---|---|
| $x$ | 0 | 1 | 3 | 4 |
|-----|---|---|---|---|



|     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| $y$ | $a$ | 4.3 | 4.8 | 6.7 |
|-----|-----|-----|-----|-----|

若  $x, y$  具有线性相关关系，且回归方程为  $\hat{y} = 0.95x + 2.6$ ，则  $a =$ \_\_\_\_\_.

【答案】 2.2

【详解】

将  $\bar{x} = \frac{0+1+3+4}{4} = 2, \bar{y} = \frac{a+4.3+4.8+6.7}{4} = \frac{a+15.8}{4}$  代入回归方程为  $\hat{y} = 0.95x + 2.6$ ，可得  $\frac{a+15.8}{4} = 4.5 \Rightarrow a = 2.2$ ，应填答案 2.2.

点睛：解答这类问题的常规方法就是先求出  $\bar{x} = 2, \bar{y} = \frac{a+15.8}{4}$ ，再借助这个点  $(2, \frac{a+15.8}{4})$  的坐标满足回归方程为  $\hat{y} = 0.95x + 2.6$  这一结论，将其代入回归方程可方程  $\frac{a+15.8}{4} = 4.5$ ，然后通过解方程得到  $a = 2.2$ ，使得问题获解.

15. 若  $(1-3x)^{10} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{10}x^{10}$ ，则  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10} =$ \_\_\_\_\_.

【答案】 1023

【详解】

解：  $\because (1-3x)^{10} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{10}x^{10}$ ，

令  $x=0$  得：  $1 = a_0$ ；①

令  $x=1$  得：  $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10} = (1-3)^{10} = 1024$ ；②

由①②可得：  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10} = 1024 - 1 = 1023$ ；

故答案为： 1023.

16. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2mx - m^2 - 1, & -2 < x \leq 0 \\ \frac{4\ln x}{x} - \frac{m+2}{e}, & x > 0 \end{cases}$  在区间  $(-2, +\infty)$  上有且只有三个零点，则实数  $m$  的取值范围为\_\_\_\_\_.

【答案】  $(2-\sqrt{7}, 2)$

【详解】

当  $x > 0$  时，函数  $f(x)$  的图像是函数  $y = \frac{4\ln x}{x}$  的图像进行上下平移而得到的.

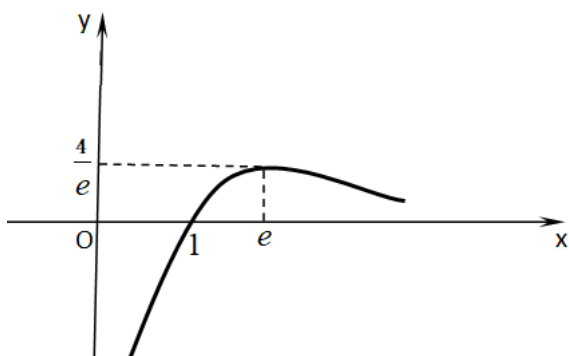


又由函数  $y = \frac{4 \ln x}{x}$  有  $y' = \frac{4(1 - \ln x)}{x^2}$ .

由  $y' = \frac{4(1 - \ln x)}{x^2} > 0$ , 得  $x < e$ ,  $y' = \frac{4(1 - \ln x)}{x^2} < 0$ , 得  $x > e$ .

所以函数  $y = \frac{4 \ln x}{x}$  在  $(0, e)$  上单调递增, 在  $(e, +\infty)$  上单调递减, 图像如图.

当  $x > 1$  时,  $y = \frac{4 \ln x}{x} > 0$ .



所以在  $(0, +\infty)$  上, 函数  $f(x)$  至多有 2 个零点.

当  $-2 < x \leq 0$  时,  $f(x) = x^2 - 2mx - m^2 - 1$ ,  $f(0) = -m^2 - 1 < 0$ , 其对称轴为  $x = m$ .

此时二次方程  $x^2 - 2mx - m^2 - 1 = 0$  有两相异号的实根.

所以在  $(-2, 0)$  上, 函数  $f(x)$  至多有 1 个零点.

因为函数  $f(x)$  在区间  $(-2, +\infty)$  上有且只有三个零点.

所以  $f(x)$  在  $-2 < x \leq 0$  上有一个零点, 在  $(0, +\infty)$  上有 2 个零点.

$$\text{则} \begin{cases} \frac{m+2}{e} > 0 \\ f(e) = \frac{4}{e} - \frac{m+2}{e} > 0 \\ (-2)^2 - 2m \times (-2) - m^2 - 1 > 0 \end{cases}, \text{解得: } 2 - \sqrt{7} < m < 2$$

故答案为:  $(2 - \sqrt{7}, 2)$

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.



17. 已知复数 $z_1 = -2 + i$ ,  $z_1 z_2 = -5 + 5i$ (其中 $i$ 为虚数单位)

(1)求复数 $z_2$ ;

(2)若复数 $z_3 = (3 - z_2)[(m^2 - 2m - 3) + (m - 1)i]$ 所对应的点在第四象限, 求实数 $m$ 的取值范围.

【答案】(1)  $\because$  复数 $z_1 = -2 + i$ ,  $z_1 z_2 = -5 + 5i$ ,

$$\therefore z_2 = \frac{-5+5i}{-2+i} = \frac{(-5+5i)(-2-i)}{(-2+i)(-2-i)} = \frac{15-5i}{5} = 3 - i;$$

$$(2) z_3 = (3 - z_2)[(m^2 - 2m - 3) + (m - 1)i]$$

$$= i[(m^2 - 2m - 3) + (m - 1)i]$$

$$= -(m - 1) + (m^2 - 2m - 3)i,$$

$\because$  复数 $z_3$ 所对应的点在第四象限,

$$\therefore \begin{cases} -(m - 1) > 0 \\ m^2 - 2m - 3 < 0 \end{cases}$$

解得 $-1 < m < 1$ .

$\therefore$  实数 $m$ 的取值范围是 $(-1, 1)$ .

18. 已知二项式 $(\frac{1}{2} + 2x)^n$ ,

(1)若展开式中第5项, 第6项与第7项的二项式系数成等差数列, 求展开式中二项式系数最大项的系数;

(2)若展开式前三项的二项式系数和等于79, 求展开式中系数最大的项.

【答案】解: 二项式 $(\frac{1}{2} + 2x)^n$ 的通项为 $T_{r+1} = C_n^r (\frac{1}{2})^{n-r} (2x)^r$ ,

$$(1) \because C_n^4 + C_n^6 = 2C_n^5,$$

$$\therefore n^2 - 21n + 98 = 0,$$

$$\therefore n = 7 \text{ 或 } n = 14,$$

当 $n = 7$ 时, 展开式中二项式系数最大的项是 $T_4$ 和 $T_5$ ,

$$\text{且 } T_4 \text{ 的系数} = C_7^3 (\frac{1}{2})^4 2^3 = \frac{35}{2},$$

$$T_5 \text{ 的系数} = C_7^4 (\frac{1}{2})^3 2^4 = 70;$$



当  $n = 14$  时，展开式中二项式系数最大的项是  $T_8$ ，

$$\text{且 } T_8 \text{ 的系数} = C_{14}^7 \left(\frac{1}{2}\right)^7 2^7 = 3432;$$

(2) 由  $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 = 79$ ，可得  $n = 12$ ，

设  $T_{k+1}$  项的系数最大，

$$\therefore \left(\frac{1}{2} + 2x\right)^{12} = \left(\frac{1}{2}\right)^{12} (1 + 4x)^{12},$$

$(1 + 4x)^{12}$  展开式的通项为  $C_{12}^k 4^k x^k$ ，

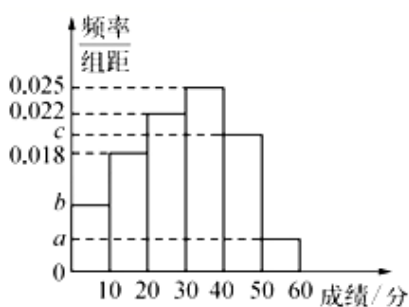
$$\therefore \begin{cases} C_{12}^k 4^k \geq C_{12}^{k-1} 4^{k-1} \\ C_{12}^k 4^k \geq C_{12}^{k+1} 4^{k+1} \end{cases}$$

$$\therefore 9.4 \leq k \leq 10.4, \therefore k = 10,$$

$\therefore$  展开式中系数最大的项为  $T_{11}$ ，

$$\text{且 } T_{11} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 C_{12}^{10} 2^{10} x^{10} = 16896 x^{10}.$$

19. 为调研高中生的作文水平.在某市普通高中的某次联考中，参考的文科生与理科生人数之比为1:4，且成绩分布在  $[0, 60]$  的范围内，规定分数在 50 以上（含 50）的作文被评为“优秀作文”，按文理科用分层抽样的方法抽取 400 人的成绩作为样本，得到成绩的频率分布直方图，如图所示.其中  $a, b, c$  构成以 2 为公比的等比数列.



(1) 求  $a, b, c$  的值；

(2) 填写下面  $2 \times 2$  列联表，能否在犯错误的概率不超过 0.01 的情况下认为“获得优秀作文”与“学生的文理科”有关？

|  |     |     |    |
|--|-----|-----|----|
|  | 文科生 | 理科生 | 合计 |
|--|-----|-----|----|



|     |   |  |     |
|-----|---|--|-----|
| 获奖  | 6 |  |     |
| 不获奖 |   |  |     |
| 合计  |   |  | 400 |

(3) 将上述调查所得的频率视为概率，现从全市参考学生中，任意抽取 2 名学生，记“获得优秀作文”的学生人数为  $X$ ，求  $X$  的分布列及数学期望.

附：
$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$
，其中  $n = a+b+c+d$ .

|                 |       |       |       |       |       |       |        |
|-----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|
| $P(K^2 \geq k)$ | 0.15  | 0.10  | 0.05  | 0.025 | 0.010 | 0.005 | 0.001  |
| $k$             | 2.072 | 2.706 | 3.841 | 5.024 | 6.635 | 7.879 | 10.828 |

【答案】(1)  $a = 0.005$ ， $b = 0.01$ ， $c = 0.02$ ；(2) 列联表见解析，在犯错误的概率不超过 0.01 的情况下，不能认为“获得优秀作文”与“学生的文理科”有关；(3) 分布列见解析， $\frac{1}{10}$

【分析】

(1) 根据频率和等于 1 可得  $a+b+c = 0.35$ ，再根据  $a, b, c$  构成以 2 为公比的等比数列可解得结果；

(2) 根据分层抽样可得  $2 \times 2$  列联表，根据公式计算  $K^2$ ，结合临界值表可得答案；

(3)  $X \sim B(2, \frac{1}{20})$ ，根据二项分布的概率公式和数学期望公式可得结果.

【详解】

(1) 由频率分布直方图可知， $10 \times (a+b+c) = 1 - 10 \times (0.018 + 0.022 + 0.025) = 0.35$ ，

因为  $a, b, c$  构成以 2 为公比的等比数列，所以  $a + 2a + 4a = 0.35$ ，解得  $a = 0.005$ ，

所以  $b = 2a = 0.01$ ， $c = 4a = 0.02$ 。

故  $a = 0.005$ ， $b = 0.01$ ， $c = 0.02$ 。

(2) 获奖的人数为  $0.005 \times 10 \times 400 = 20$  人，

因为参考的文科生与理科生人数之比为 1:4，所以 400 人文科生的数量为  $400 \times \frac{1}{5} = 80$ ，理科生的数量为



$$400 - 80 = 320.$$

由表可知，获奖的文科生有 6 人，所以获奖的理科生有  $20 - 6 = 14$  人，不获奖的文科生有  $80 - 6 = 74$  人.

于是可以得到  $2 \times 2$  列联表如下：

|     | 文科生 | 理科生 | 合计  |
|-----|-----|-----|-----|
| 获奖  | 6   | 14  | 20  |
| 不获奖 | 74  | 306 | 380 |
| 合计  | 80  | 320 | 400 |

$$K^2 = \frac{400 \times (6 \times 306 - 14 \times 74)^2}{20 \times 380 \times 80 \times 320} \approx 1.32 < 6.635$$

所以在犯错误的概率不超过 0.01 的情况下，不能认为“获得优秀作文”与“学生的文理科”有关.

(3) 由 (2) 可知，获奖的概率为  $\frac{20}{400} = \frac{1}{20}$ ,

$X$  的可能取值为 0, 1, 2,  $X \sim B(2, \frac{1}{20})$ ,

$$P(X = 0) = C_2^0 \cdot \left(\frac{1}{20}\right)^0 \cdot \left(\frac{19}{20}\right)^2 = \frac{361}{400},$$

$$P(X = 1) = C_2^1 \cdot \left(\frac{1}{20}\right)^1 \cdot \left(\frac{19}{20}\right)^1 = \frac{38}{400} = \frac{19}{200},$$

$$P(X = 2) = C_2^2 \cdot \left(\frac{1}{20}\right)^2 \cdot \left(\frac{19}{20}\right)^0 = \frac{1}{400},$$

分布列如下：

| $X$ | 0                 | 1                | 2               |
|-----|-------------------|------------------|-----------------|
| $P$ | $\frac{361}{400}$ | $\frac{19}{200}$ | $\frac{1}{400}$ |

数学期望为  $E(X) = 2 \times \frac{1}{20} = \frac{1}{10}$ .



20. 已知函数  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - (a+2)x + 2a \ln x$  ( $a > 0$ ),

(1) 若曲线  $y = f(x)$  在点  $(1, f(1))$  处的切线为  $y = 2x + b$ , 求  $a + 2b$  的值;

(2) 设函数  $g(x) = -(a+2)x$ , 若至少存在一个  $x_0 \in [e, 4]$ , 使得  $f(x_0) > g(x_0)$  成立, 求实数  $a$  的取值范围.

【答案】(1)  $-10$ ; (2)  $a > -\frac{2}{\ln 2}$ .

【详解】

解: (1)  $f(x)$  的定义域为  $(0, +\infty)$ ,  $f'(x) = x - (a+2) + \frac{2a}{x}$ ,

$$\therefore f(1) = \frac{1}{2} - (a+2) = 2 + b, \quad f'(1) = 1 - (a+2) + 2a = 2,$$

解得  $a = 3$ ,  $b = -\frac{13}{2}$ ,  $\therefore a + 2b = -10$ .

(2) 若至少存在一个  $x_0 \in [e, 4]$ , 使得  $f(x_0) > g(x_0)$ ,  $\therefore \frac{1}{2}x^2 + 2a \ln x > 0$ ,

当  $x \in [e, 4]$  时,  $\ln x > 1$ ,  $\therefore 2a > -\frac{\frac{1}{2}x^2}{\ln x}$  有解, 令  $h(x) = -\frac{\frac{1}{2}x^2}{\ln x}$ ,

$$\therefore 2a > h(x)_{\min}, \quad h'(x) = -\frac{x \ln x - \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = -\frac{x \left( \ln x - \frac{1}{2} \right)}{(\ln x)^2} < 0,$$

$$\therefore h(x) \text{ 在 } [e, 4] \text{ 上单调递减, } h(x)_{\min} = h(4) = -\frac{\frac{1}{2} \times 4^2}{\ln 4} = -\frac{8}{2 \ln 2} = -\frac{4}{\ln 2},$$

$$\therefore 2a > -\frac{4}{\ln 2}, \text{ 即 } a > -\frac{2}{\ln 2}.$$

21. 已知一个口袋中有  $m$  个红球和  $n$  个白球 ( $m, n \in \mathbf{N}^*$ ,  $m \geq 2$ ,  $n \geq 2$ ), 这些球除颜色外完全相同. 现将口袋中的球随机地逐个摸出 (不放回), 直到红球全部被摸出为止.

(1) 当  $m = 2$ ,  $n = 3$  时, 试求“摸球次数为 5”的概率;

(2) 随机变量  $X$  表示摸球次数,  $E(X)$  是  $X$  的数学期望. 写出  $X$  的概率分布列, 并求  $E(X)$ .



【答案】(1)  $\frac{2}{5}$ ；(2) 分布列见详解； $E(X) = \frac{m(m+n+1)}{m+1}$ 。

【详解】

(1) 当  $m=2$ ， $n=3$  时，由题意，红球全部摸出，共有  $C_5^2=10$  种情况；

若摸球次数为 5，则第 5 次摸到红球，此时所包含的基本事件个数为  $C_4^1=4$  个；

因此，“摸球次数为 5”的概率为  $P = \frac{C_4^1}{C_5^2} = \frac{2}{5}$ ；

(2) 由题意， $X$  的可能取值为： $m, m+1, m+2, m+3, \dots, m+n$ ，

从袋中  $m$  个红球和  $n$  个白球中，将红球全部摸出，共有  $C_{m+n}^m$  种情况；

则  $P(X=m) = \frac{1}{C_{m+n}^m}$ ， $P(X=m+1) = \frac{C_m^{m-1}}{C_{m+n}^m}$ ， $P(X=m+2) = \frac{C_{m+1}^{m-1}}{C_{m+n}^m}$ ， $P(X=m+3) = \frac{C_{m+2}^{m-1}}{C_{m+n}^m}$ ，……，

$P(X=m+n) = \frac{C_{m+n-1}^{m-1}}{C_{m+n}^m}$ ，

所以  $X$  的分布列为：

|     |                       |                               |                                   |                                   |         |                                     |
|-----|-----------------------|-------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|---------|-------------------------------------|
| $X$ | $m$                   | $m+1$                         | $m+2$                             | $m+3$                             | $\dots$ | $m+n$                               |
| $P$ | $\frac{1}{C_{m+n}^m}$ | $\frac{C_m^{m-1}}{C_{m+n}^m}$ | $\frac{C_{m+1}^{m-1}}{C_{m+n}^m}$ | $\frac{C_{m+2}^{m-1}}{C_{m+n}^m}$ | $\dots$ | $\frac{C_{m+n-1}^{m-1}}{C_{m+n}^m}$ |

因此其数学期望为：

$$E(X) = \frac{m}{C_{m+n}^m} + \frac{(m+1)C_m^{m-1}}{C_{m+n}^m} + \frac{(m+2)C_{m+1}^{m-1}}{C_{m+n}^m} + \frac{(m+3)C_{m+2}^{m-1}}{C_{m+n}^m} + \dots + \frac{(m+n)C_{m+n-1}^{m-1}}{C_{m+n}^m}$$

$$\text{因为 } (m+k)C_{m+k-1}^{m-1} = \frac{(m+k)A_{m+k-1}^{m-1}}{A_{m-1}^{m-1}} = \frac{A_{m+k}^m}{A_{m-1}^{m-1}} = \frac{mA_{m+k}^m}{A_m^m} = mC_{m+k}^m, (k=1, 2, 3, \dots, n)$$

$$\text{所以 } E(X) = \frac{m}{C_{m+n}^m} + \frac{mC_{m+1}^m}{C_{m+n}^m} + \frac{mC_{m+2}^m}{C_{m+n}^m} + \frac{mC_{m+3}^m}{C_{m+n}^m} + \dots + \frac{mC_{m+n}^m}{C_{m+n}^m}$$

$$= \frac{m}{C_{m+n}^m} (1 + C_{m+1}^m + C_{m+2}^m + C_{m+3}^m + \dots + C_{m+n}^m) = \frac{m}{C_{m+n}^m} (C_{m+1}^{m+1} + C_{m+1}^m + C_{m+2}^m + C_{m+3}^m + \dots + C_{m+n}^m)$$



$$= \frac{m}{C_{m+n}^m} (C_{m+2}^{m+1} + C_{m+2}^m + C_{m+3}^m + \cdots + C_{m+n}^m) = \frac{m}{C_{m+n}^m} (C_{m+3}^{m+1} + C_{m+3}^m + \cdots + C_{m+n}^m) = \cdots = \frac{m}{C_{m+n}^m} (C_{m+n}^{m+1} + C_{m+n}^m)$$

$$= \frac{m}{C_{m+n}^m} C_{m+n+1}^{m+1} = \frac{mA_m^m}{A_{m+n}^m} \cdot \frac{A_{m+n+1}^{m+1}}{A_{m+1}^{m+1}} = \frac{m(m+n+1)}{m+1}.$$

22. 在心理学研究中，常采用对比试验的方法评价不同心理暗示对人的影响，具体方法如下：将参加试验的志愿者随机分成两组，一组接受甲种心理暗示，另一组接受乙种心理暗示，通过对比这两组志愿者接受心理暗示后的结果来评价两种心理暗示的作用，现有 6 名男志愿者  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$  和 4 名女志愿者  $B_1, B_2, B_3, B_4$ ，从中随机抽取 5 人接受甲种心理暗示，另 5 人接受乙种心理暗示。

(I) 求接受甲种心理暗示的志愿者中包含  $A_1$  但不包含  $B_1$  的频率。

(II) 用  $X$  表示接受乙种心理暗示的女志愿者人数，求  $X$  的分布列与数学期望  $EX$ 。

【答案】解：(I) 记接受甲种心理暗示的志愿者中包含  $A_1$  但不包含  $B_1$  的事件为  $M$ ，

$$\text{则 } P(M) = \frac{C_8^4}{C_{10}^5} = \frac{5}{18};$$

(II)  $X$  的可能取值为：0, 1, 2, 3, 4,

$$\therefore P(X=0) = \frac{C_6^5}{C_{10}^5} = \frac{1}{42},$$

$$P(X=1) = \frac{C_4^1 C_6^4}{C_{10}^5} = \frac{5}{21},$$

$$P(X=2) = \frac{C_4^2 C_6^3}{C_{10}^5} = \frac{10}{21},$$

$$P(X=3) = \frac{C_4^3 C_6^2}{C_{10}^5} = \frac{5}{21},$$

$$P(X=4) = \frac{C_4^4 C_6^1}{C_{10}^5} = \frac{1}{42}.$$

$\therefore X$  的分布列为

|     |                |                |                 |                |                |
|-----|----------------|----------------|-----------------|----------------|----------------|
| $X$ | 0              | 1              | 2               | 3              | 4              |
| $P$ | $\frac{1}{42}$ | $\frac{5}{21}$ | $\frac{10}{21}$ | $\frac{5}{21}$ | $\frac{1}{42}$ |

$$X \text{ 的数学期望 } EX = 0 \times \frac{1}{42} + 1 \times \frac{5}{21} + 2 \times \frac{10}{21} + 3 \times \frac{5}{21} + 4 \times \frac{1}{42} = 2.$$



