江苏省仪征中学 2018-2019 学年第一学期高三

数学周三练习（1）文科

2018. 9. 5

范围：集合与逻辑、函数与导数、三角函数、平面向量、复数

一、填空题：本大题共 14 小题，每小题 5 分，计 70 分. 不需写出解答过程，请把答案写在答题纸的指定位置上.

1．若集合 $P=\{-1,0,1,2\}$，$Q=\{0,2,3\}$，则 $P\cap Q=$____▲____.

2．若$(a+b\mathrm{i})(3-4\mathrm{i})=25$ (a，$b\in\mathbf{R}$，i 为虚数单位)，则 $a+b$ 的值为____▲____.

3．记不等式 $x^2+x-6<0$ 的解集为集合 A，函数 $y=\lg(x-a)$的定义域为集合 B．若“$x\in A$”是“$x\in B$”的充分条件，则实数 a 的取值范围为____▲____.

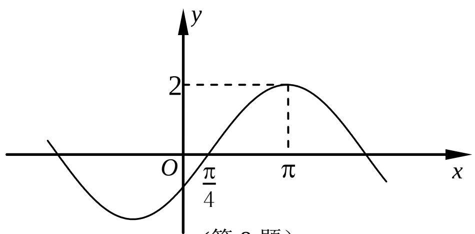
4．将函数 $y=\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})$ 的图象上的所有点向右平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位，再将图象上所有点的横坐标变为原来的 $\dfrac{1}{2}$ 倍（纵坐标不变），则所得的图象的函数解析式为____▲____.

5．在平面直角坐标系 xOy 中，双曲线$\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$ 的焦点到其渐近线的距离为____▲____.

6．在△ABC 中，已知 $A=45^\circ$，$C=105^\circ$，$BC=\sqrt{2}$，则 $AC=$____▲____.

7．设向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，$\boldsymbol{a}$=（2，1），$\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$=（5，4），则 $\sin\theta$=____▲____.

8．若函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\ \omega>0,\ |\varphi|<\pi)$的部分图 象如图所示，则 $f(-\pi)$的值为____▲____.



(第 8 题)

9．已知 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，当 $x\in(0,+\infty)$时，$f(x)=\log_2 x$，则不等式 $f(x)<-1$ 的解集是▲____.

10．设函数 $f(x)=1-x\sin x$ 在 $x=x_0$ 处取极值，则 $(1+x_0^2)(1+\cos 2x_0)$ =____▲____.

11．设 P 是函数 $y=\sqrt{x}(x+1)$ 图象上异于原点的动点，且该图象在点 P 处的切线的倾斜角为 θ，则 θ 的取值范围是____▲____.

12．在△ABC中，$AB=3$，$AC=2$，$\angle BAC=120°$，$\overrightarrow{BM}=\lambda\overrightarrow{BC}$．若$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}=-\dfrac{17}{3}$，则实数$\lambda$的值为____▲____．

13．在平面直角坐标系xOy中，若圆$(x-2)^2+(y-2)^2=1$上存在点M，使得点M关于x轴的对称点N在直线$kx+y+3=0$上，则实数k的最小值为____▲____．

14．已知$f(x)=x^3-2x^2+x+a$，$g(x)=-2x+\dfrac{9}{x}$．若对任意的$x_1\in[-1，2]$，存在$x_2\in[2，4]$，使得$f(x_1)=g(x_2)$，则实数a的取值范围是____▲____．

二、解答题：本大题共 6 小题，计 90 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤，请把答案写在答题纸的指定区域内.

15．（本小题满分 14 分）已知$\vec{a}=(2\sin(x+\frac{\theta}{2}),\sqrt{3})$，$\vec{b}=(\cos(x+\frac{\theta}{2}),2\cos^2(x+\frac{\theta}{2}))$，且$0\le\theta\le\pi$，$f(x)=\vec{a}\cdot\vec{b}-\sqrt{3}$，且$f(x)$为偶函数.

（1）求θ；　(2) 求满足$f(x)=1$，$x\in[-\pi,\pi]$的x的集合．

16．（本小题满分 14 分）在△ABC中，内角A，B，C所对的边分别为a，b，c，$\cos B=\dfrac{4}{5}$.

（1）若$c=2a$，求$\dfrac{\sin B}{\sin C}$的值；　（2）若$C-B=\dfrac{\pi}{4}$，求$\sin A$的值．

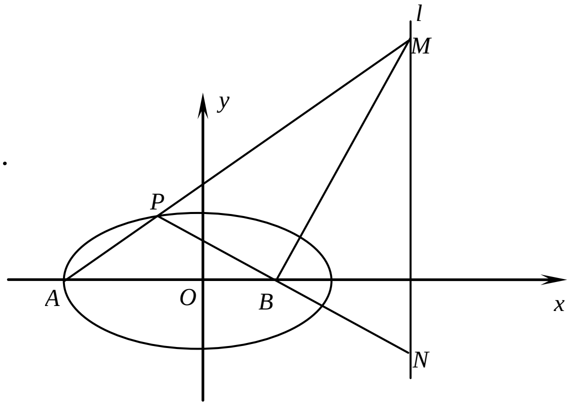
17．（本小题满分 14 分）某工厂有 100 名工人接受了生产 1000 台某产品的总任务，每台产品由 9 个甲型装置和 3 个乙型装置配套组成，每个工人每小时能加工完成 1 个甲型装置或 3 个乙型装置．现将工人分成两组分别加工甲型和乙型装置．设加工甲型装置的工人有x人，他们加工完甲型装置所需时间为t_1小时，其余工人加工完乙型装置所需时间为t_2小时．设$f(x)=t_1+t_2$.

（1）求$f(x)$的解析式，并写出其定义域；　（2）当x等于多少时，$f(x)$取得最小值？

18.（本小题满分 16 分）如图，在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，且过点$(1,\frac{\sqrt{3}}{2})$．过椭圆 C 的左顶点 A 作直线交椭圆 C 于另一点 P，交直线 l：$x=m(m>a)$于点 M．已知点 $B(1,0)$，直线 PB 交 l 于点 N．

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）若 MB 是线段 PN 的垂直平分线，求实数 m 的值．



(第 18 题）

19. （本小题满分 16 分）已知函数 $f(x)=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$。

（1）求函数 $f(x)$ 的定义域和值域；

（2）设 $F(x)=\frac{a}{2}\cdot\left[f^2(x)-2\right]+f(x)$（$a$ 为实数），求 $F(x)$ 在 $a<0$ 时的最大值 $g(a)$；

（3）对（2）中 $g(a)$，若 $-m^2+2tm+\sqrt{2}\le g(a)$ 对满足 $a<0$ 所有的实数 a 及 $t\in[-1,1]$ 恒成立，求实数 m 的取值范围。

20.（本小题满分 16 分）已知函数 $f(x)=2x^3-3(a+1)x^2+6ax$，$a\in\mathbf{R}$.

（1）曲线 $y=f(x)$在 $x=0$ 处的切线的斜率为 3，求 a 的值；

（2）若对于任意 $x\in(0，+\infty)$，$f(x)+f(-x)\geqslant 12\ln x$ 恒成立，求 a 的取值范围；

（3）若 $a>1$，设函数 $f(x)$在区间$[1，2]$上的最大值、最小值分别为 $M(a)$、$m(a)$，记 $h(a)=M(a)-m(a)$，求 $h(a)$的最小值.

参考答案

1．{0，2}；　2. 7；　3. $a\le -3$；　4. $y=\sin 4x$；　5. 3；　6. 1；　7. $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$；　8. -1；

9．$(-\infty,-2)\cup(0,\dfrac{1}{2})$；　10. 2；　11. $[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2})$；　12. $\dfrac{1}{3}$；　13. $-\dfrac{4}{3}$；　14. $-\dfrac{7}{4}\le a\le -\dfrac{3}{2}$．

15.　（1）$\theta=\dfrac{\pi}{6}$；（2）$x\in\{-\dfrac{5\pi}{6},-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}\}$

16. 解：（1）$\dfrac{\sin B}{\sin C}=\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$.　　（2）$\dfrac{31\sqrt{2}}{50}$.

17.　解：（1）因为 $t_1=\dfrac{9000}{x}$，　$t_2=\dfrac{3000}{3(100-x)}=\dfrac{1000}{100-x}$，　…………………4 分

所以 $f(x)=t_1+t_2=\dfrac{9000}{x}+\dfrac{1000}{100-x}$，　…………………………5 分

定义域为$\{x\,|\,1\leqslant x\leqslant 99，x\in \mathbf{N}^*\}$．　…………………………6 分

（2）$f(x)=1000(\dfrac{9}{x}+\dfrac{1}{100-x})=10[x+(100-x)](\dfrac{9}{x}+\dfrac{1}{100-x})$

$=10[10+\dfrac{9(100-x)}{x}+\dfrac{x}{100-x}]$．　…………………………10 分

因为 $1\leqslant x\leqslant 99$，$x\in\mathbf{N}^*$，所以$\dfrac{9(100-x)}{x}>0$，$\dfrac{x}{100-x}>0$，

所以$\dfrac{9(100-x)}{x}+\dfrac{x}{100-x}\geqslant 2\sqrt{\dfrac{9(100-x)}{x}\cdot\dfrac{x}{100-x}}=6$，　…………………12 分

当且仅当$\dfrac{9(100-x)}{x}=\dfrac{x}{100-x}$，即当 $x=75$ 时取等号．　…………………13 分

答：当 $x=75$ 时，$f(x)$取得最小值．　…………………………14 分

18. 解：（1）因为椭圆 C 的离心率为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $a^2=4b^2$．　…………………………2 分

又因为椭圆 C 过点$(1，\dfrac{\sqrt{3}}{2})$，所以$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{\frac{3}{4}}{b^2}=1$，　解得 $a^2=4$，$b^2=1$．

所以椭圆 C 的方程为$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$．　…………………………5 分

（2）解法 1：设 $P(x_0，y_0)$，$-2<x_0<2$，　$x_0\neq 1$，则$\dfrac{{x_0}^2}{4}+{y_0}^2=1$．

因为 MB 是 PN 的垂直平分线，所以 P 关于 B 的对称点 $N(2-x_0，-y_0)$，所以 $2-x_0=m$．

由 $A(-2，0)$，$P(x_0，y_0)$，可得直线 AP 的方程为 $y=\dfrac{y_0}{x_0+2}(x+2)$，

令 $x=m$，得 $y=\dfrac{y_0(m+2)}{x_0+2}$，即 $M(m，\dfrac{y_0(m+2)}{x_0+2})$．因为 $PB\perp MB$，所以 $k_{PB}\,k_{MB}=-1$，

所以 $k_{PB}\,k_{MB}=\dfrac{y_0}{x_0-1}\cdot\dfrac{\frac{y_0(m+2)}{x_0+2}}{m-1}=-1$，即$\dfrac{{y_0}^2(m+2)}{(x_0-1)(x_0+2)(m-1)}=-1$．

因为$\dfrac{x_0^{\ 2}}{4}+y_0^{\ 2}=1$．所以$\dfrac{(x_0-2)(m+2)}{4(x_0-1)(m-1)}=1$．　　…………………………12 分

因为 $x_0=2-m$ ，所以化简得 $3m^2-10m+4=0$，解得 $m=\dfrac{5\pm\sqrt{13}}{3}$.

因为 $m>2$，所以 $m=\dfrac{5+\sqrt{13}}{3}$.　　…………………………16 分

解法 2：①当 AP 的斜率不存在或为 0 时，不满足条件．　　…………………………6 分

②设 AP 斜率为 k，则 AP：$y=k(x+2)$，

联立$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+y^2=1,\\ y=k(x+2),\end{cases}$ 消去 y 得$(4k^2+1)x^2+16k^2x+16k^2-4=0$．

因为 $x_A=-2$，所以 $x_P=\dfrac{-8k^2+2}{4k^2+1}$，所以 $y_P=\dfrac{4k}{4k^2+1}$，所以 $P(\dfrac{-8k^2+2}{4k^2+1},\ \dfrac{4k}{4k^2+1})$．　……8 分

因为 PN 的中点为 B，所以 $m=2-\dfrac{-8k^2+2}{4k^2+1}=\dfrac{16k^2}{4k^2+1}$．(*)　……………………10 分

因为 AP 交直线 l 于点 M，所以 $M(m，k(m+2))$，

因为直线 PB 与 x 轴不垂直，所以$\dfrac{-8k^2+2}{4k^2+1}\neq 1$，即 $k^2\neq\dfrac{1}{12}$，

所以 $k_{PB}=\dfrac{\dfrac{4k}{4k^2+1}}{\dfrac{-8k^2+2}{4k^2+1}-1}=\dfrac{-4k}{12k^2-1}$，$k_{MB}=\dfrac{k(m+2)}{m-1}$．

因为 $PB\perp MB$，所以 $k_{PB}\ k_{MB}=-1$，所以$\dfrac{-4k}{12k^2-1}\ \dfrac{k(m+2)}{m-1}=-1$．（**）　…12 分

将(*)代入（**），化简得 $48k^4-32k^2+1=0$，

解得 $k^2=\dfrac{4\pm\sqrt{13}}{12}$，所以 $m=\dfrac{16k^2}{4k^2+1}=\dfrac{5\pm\sqrt{13}}{3}$.　又因为 $m>2$，所以 $m=\dfrac{5+\sqrt{13}}{3}$.　…16 分

19. 解：(1) 由 $1+x\geq 0$ 且 $1-x\geq 0$，得 $-1\leq x\leq 1$，所以定义域为$[-1,1]$　…………2 分

又 $f(x)^2=2+2\sqrt{1-x^2}\in[2,4]$，由 $f(x)\geq 0$ 得值域为$[\sqrt{2},2]$　…………4 分

（2）因为 $F(x)=\dfrac{a}{2}\cdot\left[f^2(x)-2\right]+f(x)=a\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$

令 $t=f(x)=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$，则 $\sqrt{1-x^2}=\dfrac{1}{2}t^2-1$，

$\therefore F(x)=m(t)=a(\dfrac{1}{2}t^2-1)+t=\dfrac{1}{2}at^2+t-a,t\in[\sqrt{2},2]$　…………6 分

由题意知 g(a)即为函数 $m(t)=\dfrac{1}{2}at^2+t-a,t\in[\sqrt{2},2]$的最大值。

注意到直线 $t=-\dfrac{1}{a}$ 是抛物线 $m(t)=\dfrac{1}{2}at^2+t-a$ 的对称轴。

因为 a<0 时,函数 y=m(t)，$t\in[\sqrt{2},2]$的图象是开口向下的抛物线的一段，

①若 $t=-\dfrac{1}{a}\in(0,\sqrt{2}]$，即 $a\leq-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 则 $g(a)=m(\sqrt{2})=\sqrt{2}$

②若 $t=-\frac{1}{a}\in(\sqrt{2},2]$，即 $-\frac{\sqrt{2}}{2}<a\le-\frac{1}{2}$ 则 $g(a)=m(-\frac{1}{a})=-a-\frac{1}{2a}$

③若 $t=-\frac{1}{a}\in(2,+\infty)$，即 $-\frac{1}{2}<a<0$ 则 $g(a)=m(2)=a+2$ ……

综上有 $g(a)=\begin{cases}a+2, & a\ge-\frac{1}{2}\\ -a-\frac{1}{2a}, & -\frac{\sqrt{2}}{2}<a<-\frac{1}{2}\\ \sqrt{2}, & a\le-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$ …………………………10 分

（3）易得 $g_{\min}(a)=\sqrt{2}$， …………12 分

由 $-m^2+2tm+\sqrt{2}\le g(a)$ 对 $a<0$ 恒成立，

即要使 $-m^2+2tm+\sqrt{2}\le g_{\min}(a)=\sqrt{2}$ 即 $m^2-2tm\ge0$ 恒成立，

令 $h(t)=-2mt+m^2$，对所有的 $t\in[-1,1]$, $h(t)\ge0$ 成立，

只需 $\begin{cases}h(-1)=2m+m^2\ge0\\ h(1)=-2m+m^2\ge0\end{cases}$，解得 $m\le-2$，或 $m=0$，或 $m\ge2$． …………16 分

20．解：解：（1）因为 $f(x)=2x^3-3(a+1)x^2+6ax$，所以 $f'(x)=6x^2-6(a+1)x+6a$，

所以曲线 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线斜率 $k=f'(0)=6a$，

所以 $6a=3$，所以 $a=\frac{1}{2}$. ……………………………2 分

（2）$f(x)+f(-x)=-6(a+1)x^2\geqslant12\ln x$ 对任意 $x\in(0，+\infty)$ 恒成立，

所以 $-(a+1)\geqslant\frac{2\ln x}{x^2}$. ……………………………4 分

令 $g(x)=\frac{2\ln x}{x^2}$，$x>0$，则 $g'(x)=\frac{2(1-2\ln x)}{x^3}$.

令 $g'(x)=0$，解得 $x=\sqrt{e}$.

当 $x\in(0，\sqrt{e})$ 时，$g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 在 $(0，\sqrt{e})$ 上单调递增；

当 $x\in(\sqrt{e}，+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 在 $(\sqrt{e}，+\infty)$ 上单调递减.

所以 $g(x)_{\max}=g(\sqrt{e})=\frac{1}{e}$， ……………………………6 分

所以 $-(a+1)\geqslant\frac{1}{e}$，即 $a\leqslant-1-\frac{1}{e}$，所以 a 的取值范围为 $(-\infty，-1-\frac{1}{e}]$. ………8 分

（3）因为 $f(x)=2x^3-3(a+1)x^2+6ax$，

所以 $f'(x)=6x^2-6(a+1)x+6a=6(x-1)(x-a)$，$f(1)=3a-1$，$f(2)=4$.

令 $f'(x)=0$，则 $x=1$ 或 a. ……………………………10 分

$f(1)=3a-1$，$f(2)=4$.

①当 $1<a\leqslant\frac{5}{3}$ 时，

当 $x\in(1，a)$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(1，a)$ 上单调递减；

当 $x\in(a，2)$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(a，2)$ 上单调递增.

又因为 $f(1)\leqslant f(2)$，所以 $M(a)=f(2)=4$，$m(a)=f(a)=-a^3+3a^2$，

所以 $h(a)=M(a)-m(a)=4-(-a^3+3a^2)=a^3-3a^2+4$.

因为 $h'(a)=3a^2-6a=3a(a-2)<0$，所以 $h(a)$在$(1,\frac{5}{3}]$上单调递减，

所以当 $a\in(1,\frac{5}{3}]$时，$h(a)$最小值为 $h(\frac{5}{3})=\frac{8}{27}$. ··························12 分

②当$\frac{5}{3}<a<2$ 时，

当 $x\in(1,a)$时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$在$(1,a)$上单调递减；

当 $x\in(a,2)$时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$在$(a,2)$上单调递增.

又因为 $f(1)>f(2)$，所以 $M(a)=f(1)=3a-1$，$m(a)=f(a)=-a^3+3a^2$，

所以 $h(a)=M(a)-m(a)=3a-1-(-a^3+3a^2)=a^3-3a^2+3a-1$.

因为 $h'(a)=3a^2-6a+3=3(a-1)^2\geqslant 0$. 所以 $h(a)$在$(\frac{5}{3},2)$上单调递增，

所以当 $a\in(\frac{5}{3},2)$时，$h(a)>h(\frac{5}{3})=\frac{8}{27}$. ··························14 分

③当 $a\geqslant 2$ 时，

当 $x\in(1,2)$时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$在$(1,2)$上单调递减，

所以 $M(a)=f(1)=3a-1$，$m(a)=f(2)=4$，

所以 $h(a)=M(a)-m(a)=3a-1-4=3a-5$，

所以 $h(a)$在$[2,+\infty)$上的最小值为 $h(2)=1$.

综上，$h(a)$的最小值为$\frac{8}{27}$. ··························16 分