○学习指导○

利用同构式巧解数学问题

李文东　　王恒亮

(广东省中山纪念中学,528454)　(广东省珠海实验中学,519090)

数学中的同构式是指除了变量不同,而结构相同的两个表达式. 数学中的同构式,不仅体现了数学的对称和谐美,而且运用同构式的思想解题,能够培养学生的抽象及转化化归的思维能力. 例如,求递推数列的通项公式的关键就是将递推公式变形为“依序同构”的特征,即关于(a_n,n)与$(a_{n-1},n-1)$的同构式,从而将同构式设为辅助数列便于求解. 除了数列,同构式在求解方程、不等式,以及解析几何、函数与导数等问题中都有很好的应用,下面举例说明.

一、在方程中的应用

一般地,若实数a、b分别满足$f(a)=0$和$f(b)=0$,则它们呈现同构特征,由此a、b可视为方程$f(x)=0$的两个根.

例1　若$\alpha\in[0,\pi]$,$\beta\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$,$\lambda\in\mathbf{R}$,且满足$\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)^3-\cos\alpha-2\lambda=0$,$4\beta^3+\sin\beta\cos\beta+\lambda=0$,则$\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)=$______.

解　观察两式的结构,可将等式$4\beta^3+\sin\beta\cos\beta+\lambda=0$变形为$8\beta^3+2\sin\beta\cos\beta+2\lambda=0$,即$(2\beta)^3+\sin2\beta+2\lambda=0$. 而$\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)^3-\cos\alpha-2\lambda=0$可变为$\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)^3+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)-2\lambda=0$,进一步有$\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)^3+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+2\lambda=0$.

因为$\alpha\in[0,\pi]$,$\beta\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$,故$\frac{\pi}{2}-\alpha$、$2\beta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,于是令$f(x)=x^3+\sin x+2\lambda$,$x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,则$f'(x)=3x^2+\cos x>0$,$f(x)$在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上单调递增.

由于$f\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=f(2\beta)$,故$\frac{\pi}{2}-\alpha=2\beta$,得$\frac{\alpha}{2}+\beta=\frac{\pi}{4}$,$\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

评注　仔细观察两式的结构特点,巧妙变形,构造处同构式是解决本题的关键!

例2　对于函数$y=f(x)$,若存在区间$[a,b]$,当$x\in[a,b]$时的值域为$[ka,kb]$($k>0$),则称函数$y=f(x)$为k倍值函数. 若$f(x)=\ln x+x$是k倍值函数,则k的取值范围为______.

解　易知函数$f(x)=\ln x+x$在定义域

---

(4)已知$M=\frac{a^2-a\sin\theta+1}{a^2-a\cos\theta+1}$($a$、$\theta\in\mathbf{R}$,$a\neq0$),求$M$的取值范围.

参考文献

[1] 吴超. 且行且思[M]. 安徽:安徽师范大学出版社,2015.

[2] 盛国平. 用“微专题”提高高三数学复习效率[J]. 中学数学参考,2016.

[3] 王平平. 善用“微专题”,提升高三数学三轮复习质量[J]. 数学学习与研究,2018.

$(0,+\infty)$ 内单调增，故有 $f(a)=ka$，$f(b)=kb$，即 a、b 为方程 $f(x)=kx$ 的两个不同正根，即方程 $k=\frac{\ln x}{x}+1$ 有 2 个不同正根.

令 $g(x)=\frac{\ln x}{x}+1$，则 $g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，可知 $g(x)$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 单调增，在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 单调减，且 $g(\mathrm{e})=\frac{1}{\mathrm{e}}+1$. 又当 $x\geqslant 1$ 时，$g(x)\geqslant 1$，结合 $g(x)$ 的图象，可得 $1<k<1+\frac{1}{\mathrm{e}}$.

例 3 若 x_1 满足方程 $x\mathrm{e}^x=1$，x_2 满足方程 $x\ln x=1$，则 $x_1x_2=$______.

解 由题意，$x_2\ln x_2=\ln x_2\mathrm{e}^{\ln x_2}=1$，且 $x_2>1$；又 $x_1\mathrm{e}^{x_1}=1$，令 $f(x)=x\mathrm{e}^x$，则有 $f(x_1)=f(\ln x_2)$.

显然，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调增，故 $x_1=\ln x_2$，代入 $x_2\ln x_2=1$，得 $x_1x_2=1$.

评注 本题也可以如下求解：由题意知 $\mathrm{e}^x=\frac{1}{x}$，$\ln x=\frac{1}{x}$. 然后在同一坐标系中画出 $y=\mathrm{e}^x$，$y=\ln x$，$y=\frac{1}{x}$ 的图象，根据 $y=\mathrm{e}^x$ 和 $y=\ln x$ 图象关于直线 $y=x$ 对称，以及 $y=\frac{1}{x}$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称，可得 $x_1x_2=1$.

二、在不等式中的应用

如果不等式的两侧呈现同构特征，则可由相同的结构构造函数，进而与函数的单调性找到联系，据此可用来比较变量大小或解不等式和证明不等式.

例 4 证明：当 $n>m\geqslant 2$ 时，恒有不等式 $(mn^n)^m>(nm^m)^n$.

证明 要证 $(mn^n)^m>(nm^m)^n$，只需证 $\ln(n^{mn}m^m)>\ln(m^{mn}n^n)$，即 $mn\ln n+m\ln m>mn\ln m+n\ln n$，亦即 $(m-1)n\ln n>(n-1)m\ln m$. 分离变量，得 $\frac{n\ln n}{n-1}>\frac{m\ln m}{m-1}$.

令 $g(x)=\frac{x\ln x}{x-1}(x\geqslant 2)$，则 $g'(x)=\frac{x-\ln x-1}{(x-1)^2}$. 令 $h(x)=x-\ln x-1(x\geqslant 2)$，则 $h'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}>0$，$h(x)$ 单调增，从而 $h(x)>h(2)=1-\ln 2>0$，也即 $g'(x)>0$，函数 $g(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 单调增. 因为 $n>m\geqslant 2$，故 $g(n)>g(m)$.

例 5 证明：当 $x>0$ 时，恒有

$$(\mathrm{e}^x-1)\ln(x+1)>x^2.$$

证明 依题意，只需证明 $\frac{\ln(x+1)}{x}>\frac{x}{\mathrm{e}^x-1}$. 而 $\frac{x}{\mathrm{e}^x-1}=\frac{\ln \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1}=\frac{\ln(\mathrm{e}^x-1+1)}{\mathrm{e}^x-1}$，故只需证 $\frac{\ln(x+1)}{x}>\frac{\ln(\mathrm{e}^x-1+1)}{\mathrm{e}^x-1}$.

令 $f(x)=\frac{\ln(x+1)}{x}$，则

$$f'(x)=\frac{\frac{x}{x+1}-\ln(x+1)}{x^2}.$$

再令 $g(x)=\frac{x}{x+1}-\ln(x+1)$，则有 $g'(x)=-\frac{x}{(x+1)^2}<0$，$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调减，从而 $g(x)<g(0)=0$，于是 $f'(x)<0$，即 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调减.

由 $f(x)>f(\mathrm{e}^x-1)$，原不等式等价于证明 $x<\mathrm{e}^x-1$，即 $\mathrm{e}^x>x+1(x>0)$，而这是一个大家熟知的不等式.

评注 本题还可以利用 $\mathrm{e}^x>1+x+\frac{1}{2}x^2$ 放缩，从而等价于证明 $\ln(x+1)>\frac{2x}{x+2}$.

三、在函数问题中的应用

例 6 设 $\lambda>0$，不等式 $\mathrm{e}^{\lambda x}-\frac{\ln x}{\lambda}\geqslant 0$ 恒成立，则 λ 的最小值为______.

解 显然，当 $x\in(0,1]$ 时，该不等式恒成立；当 $x>1$ 时，原不等式变为 $\lambda\mathrm{e}^{\lambda x}\geqslant\ln x$，进一步有 $\lambda x\mathrm{e}^{\lambda x}\geqslant x\ln x$. 因为 $x\ln x=\ln x\cdot\mathrm{e}^{\ln x}$，于是 $\lambda x\mathrm{e}^{\lambda x}\geqslant\ln x\cdot\mathrm{e}^{\ln x}$.

于是，令 $f(x)=x\mathrm{e}^x$，则 $f(\lambda x)\geqslant f(\ln x)$.

显然 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调增，而 λx、$\ln x\in(0,+\infty)$，故原不等式等价于 $\lambda x\geqslant\ln x$，即

$\lambda \geqslant \frac{\ln x}{x}$在$(1,+\infty)$内恒成立.

令$g(x)=\frac{\ln x}{x}$,则$g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$.可知$g(x)$在$(0,\mathrm{e})$单调增,在$(\mathrm{e},+\infty)$单调减,故$g_{\max}(x)=g(\mathrm{e})=\frac{1}{\mathrm{e}}$,从而$\lambda \geqslant \frac{1}{\mathrm{e}}$,$\lambda$的最小值为$\frac{1}{\mathrm{e}}$.

评注 可将$f(x)=x\mathrm{e}^x$和$g(x)=x\ln x=\ln x\cdot \mathrm{e}^{\ln x}$看作一对同构函数,这在很多考题中作为背景出现,特别值得我们关注!

例7 设$f(x)=x(\mathrm{e}^{2x}-a)$,若$f(x)\geqslant 1+x+\ln x$恒成立,则实数$a$的取值范围为______.

解 由题设不等式分离参数,得$a\leqslant \mathrm{e}^{2x}-\frac{1+\ln x}{x}-1$.令$g(x)=\mathrm{e}^{2x}-\frac{1+\ln x}{x}-1$,则$g'(x)=2\mathrm{e}^{2x}+\frac{\ln x}{x^2}$.显然,当$x\geqslant 1$时,$g'(x)>0$,$g(x)$在$[1,+\infty)$单调增;而当$x\in(0,1)$时,因为$g''(x)=4\mathrm{e}^{2x}+\frac{1-2\ln x}{x^3}>0$,$g'(x)$在$(0,1)$单调增,而$g'\left(\frac{1}{4}\right)=2(\sqrt{\mathrm{e}}-8\ln 4)<0$,$g'(1)>0$,故存在$x_0\in(0,1)$,使得$g'(x_0)=0$,且当$x\in(0,x_0)$时,$g'(x)<0$,$g(x)$单调减;当$x\in(x_0,1)$时,$g'(x)>0$,$g(x)$单调增.于是$a\leqslant g_{\min}(x)=g(x_0)$,其中$g'(x_0)=2\mathrm{e}^{2x_0}+\frac{\ln x_0}{x_0^2}=0$.

由$2\mathrm{e}^{2x_0}+\frac{\ln x_0}{x_0^2}=0$,得$2x_0\mathrm{e}^{2x_0}+\frac{\ln x_0}{x_0}=0$,即$2x_0\mathrm{e}^{2x_0}=-\frac{\ln x_0}{x_0}=\frac{1}{x_0}\ln\frac{1}{x_0}=\ln\frac{1}{x_0}\mathrm{e}^{\ln\frac{1}{x_0}}$.令$h(x)=x\mathrm{e}^x$,易见$h(x)$在$(0,+\infty)$单调增,故由上式,可得$2x_0=\ln\frac{1}{x_0}$,即$\mathrm{e}^{2x_0}=\frac{1}{x_0}$.

由上可得$\frac{2}{x_0}+\frac{\ln x_0}{x_0^2}=0$,即$\frac{\ln x_0}{x_0}=2$.从而$a\leqslant g_{\min}(x)=g(x_0)=\mathrm{e}^{2x_0}-\frac{1+\ln x_0}{x_0}-1=\frac{1}{x_0}-\frac{1+\ln x_0}{x_0}-1=-\frac{\ln x_0}{x_0}-1=1$.

评注 本题是一道精妙设计的好题.$g(x)$在x_0处取得最小值,虽然x_0无法直接求出,但是利用$2x_0\mathrm{e}^{2x_0}+\frac{\ln x_0}{x_0}=0$,并且经过巧妙的同构后转化为$\mathrm{e}^{2x_0}=\frac{1}{x_0}$,从而可以求出$g(x_0)$.

四、在解析几何中的应用

如果$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$满足的方程为同构式,则A、B为方程所表示曲线上的两点.特别地,若A、B满足$ax_1+by_1+c=0$,$ax_2+by_2+c=0$,则直线AB的方程为$ax+by+c=0$,这种设而不求的思想也是同构式的体现.

例8 已知焦点在x轴上,离心率为$\frac{2\sqrt{5}}{5}$的椭圆的一个顶点是抛物线$x^2=4y$的焦点,过椭圆右焦点F的直线l交椭圆于A、B两点,交y轴于点M,且$\overrightarrow{MA}=\lambda_1\overrightarrow{AF}$,$\overrightarrow{MB}=\lambda_2\overrightarrow{BF}$.

(1)求椭圆的方程;

(2)证明:$\lambda_1+\lambda_2$为定值.

解 (1)$\frac{x^2}{5}+y^2=1$.(过程略)

(2)由题意,知点$F(2,0)$,又可设$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$M(0,y_0)$.由$\overrightarrow{MA}=\lambda_1\overrightarrow{AF}$,可得

$$\begin{cases}x_1=\lambda_1(2-x_1),\\ y_1-y_0=-\lambda_1y_1.\end{cases}$$

解得$A\left(\frac{2\lambda_1}{\lambda_1+1},\frac{y_0}{\lambda_1+1}\right)$.因为点$A$在椭圆上,得$\frac{1}{5}\left(\frac{2\lambda_1}{\lambda_1+1}\right)^2+\left(\frac{y_0}{\lambda_1+1}\right)^2=1$,即$\lambda_1^2+10\lambda_1+5-5y_0^2=0$.

同理可得$\lambda_2^2+10\lambda_2+5-5y_0^2=0$,故$\lambda_1$、$\lambda_2$为方程$\lambda^2+10\lambda+5-5y_0^2=0$的两根,从而有$\lambda_1+\lambda_2=-10$为定值.

评注 本题常见的解法是将λ_1、λ_2用A、B的坐标表示出来,然后用韦达定理求解,运算量相对较大.而这里是反其道而行之,用λ_1、λ_2表示点A、B的坐标,直接运用点A、B满足曲线方程构造同构式,使得问题轻松解决!