HPM视角下高三复数专题复习教学

210821 上海交通大学附属中学嘉定分校 钟 萍 耿 亮
200062 华东师范大学教师教育学院 纪妍琳

摘 要:在高三复数概念与运算的专题复习课中,融入阿甘德与高斯复数的几何表示等复数史料,从逻辑—历史—认知三个层面,重构式地融入复数的发展史,引导学生认识复数知识的源与流以及复数与其他知识的联系.学生经历了从代数形式与几何意义两方面思考和研究问题的过程,既巩固了对复数的基本概念与运算的掌握,又体会了复数的人文与美学价值,同时锻炼了分析、推理和运算能力,提升了数学抽象、数学运算等核心素养.

关键词:HPM;高三复习课;复数

复数的概念与运算在高考试题中往往以基础题出现,因此高三数学一轮复习中常见教学模式是简单罗列知识加机械练习.这不仅淡化了复数的诞生在人类文明发展史上的价值与意义,还会让学生怀疑学习复数的必要性,高三复习时难免意趣阑珊.创设怎样的情境能够消除学生的重复感?怎样合理选取和排布数学问题,兼顾复数的基本知识和思想方法?如何引导学生在自主探究数学问题中不孤立看待复数从而有综合应用的意识?基于这个想法,笔者在一轮复习复数的教学设计中,重构式融入复数的数学史,增添学习兴趣,引领学生从数学文化和普遍联系的视角重新认识复数.

1 复数的历史及其运用

1.1 复数的发展史

16世纪意大利数学家卡丹在研究著名的"分十问题"时,在其著作《大术》中写下了$5+\sqrt{-15}$和$5-\sqrt{-15}$这样的数,成为历史上第一个使用负数平方根的人,但他并未完全理解和接受它们,称之为"诡辩式的数".复数产生的根本动因在于一元三次方程求根公式的研究.16世纪意大利数学家邦贝利对方程$x^3=15x+4$进行研究时,发现它有三个实数解4、$-2\pm\sqrt{3}$,但利用三次方程求根公式却得到了含负数开平方形式的解,面对这一矛盾,他通过将$\sqrt{-1}$引入运算从而解决了矛盾,他的工作标志着复数的产生.但复数并不是自其诞生就被接受的,数学家们对虚数的探索不断深入,也一度伴随着怀疑与否定.法国数学家笛卡尔在《几何学》中给出"虚数"和"实数"两个术语,"虚数"意为"想象中的数"(imaginary number),欧拉取"imaginary"一词的词头i来表示-1的平方根.历经了漫长而曲折的岁月,瑞士的业余数学爱好者阿甘德等人对复数几何表示的提出做出了重要贡献.阿甘德给出了如图1所示的几何意义[1].

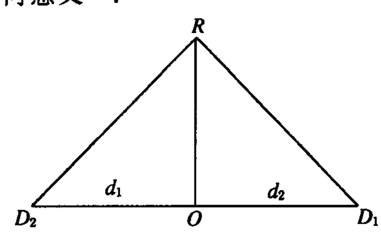

图1

有向线段OD_1逆时针旋转两次$90°$能得到OD_2 (-1),因此逆时针旋转一次$90°$,得到的OR可以看成是$+1$所表示的有向线段旋转$90°$而得到的i.

之后,德国数学家高斯完善了复数的几何表示,并提出用平面上的点表示复数、定义了复平面,此后,数学家哈密尔顿建立了更严密的代数理论:复数$a+bi$本质是有序实数对(a,b),并定义了四则运算,即$(a,b)\pm(c,d)=(a\pm c,b\pm d)$,$(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$,$\frac{(a,b)}{(c,d)}=\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2},\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)$.到19世纪后半叶,学术界对复数合理性的怀疑已基本消失,复数的应用也愈加广泛,复数为处理代数、几何和数论等数学分支以及其他学科领域的许多问题提供了方向.

1.2 复数史料的运用

课堂上,笔者采用了多种方式融入数学史.本课中数学史的运用方式如表1所示.

首先,整体设计上,采用重构式,即借鉴复数的发展史,从数系的扩充、复数的概念、复数几何意义与代数形式到复数的运算,呈现知识自然发生过程,促进学生对复数知识的源与流及概念本质的理解和应用.其次,在教学过程中,讲述数学家发明复数的曲折经历以及引用莱布尼茨的名言等均属于附加式.再次,采用顺应式改编历史名题斐波那契命题,

并应用复数知识解决该问题.复数的概念复习教学流程如图2所示[2].

表1

方式	具体表现
附加式	莱布尼茨的名言;卡丹、邦贝利、阿甘德、欧拉、高斯对复数诞生与发展的贡献;《数理精蕴》引文
顺应式	基于斐波那契命题编制数学问题
重构式	借鉴复数产生、几何意义产生到复数理论的应用与发展的历史进程作为复数专题复习的阶段划分

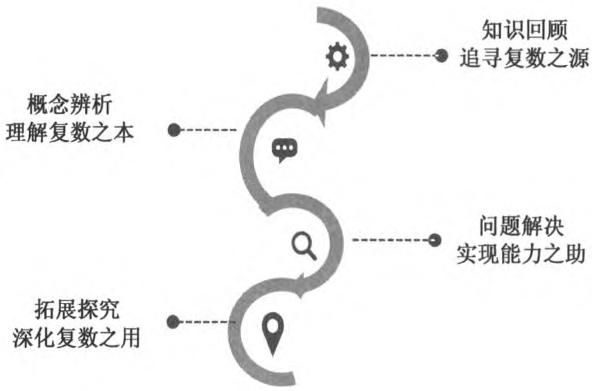

图2

2　教学设计与实施

2.1 教学分析

本节课是高三数学一轮复习中复数概念与运算的复习课,授课对象为已经复习了函数、数列和平面向量等内容的高三学生.从课前的前测卷答题情况分析,尽管他们已经在高二学习了复数的概念与运算、实系数一元二次方程的根等知识,但知识遗忘率很高,对复数诞生与发展的历史不甚了解,对复数概念的理解不透彻.为了充分发挥高三概念复习课的作用,笔者基于HPM的视角设计了这节课,在教学内容的选择上既注重系统复习复数本体知识,又渗透复数与平面几何、解析几何、向量等高中数学其他知识的联系,并能应用复数知识解决一些相关的问题.基于以上分析,明确本节课的教学目标和教学重难点.

教学目标:

(1)理解和掌握复数的概念,复数四则运算、复数的模与共轭复数的运算性质;

(2)通过自主学习、交流讨论,掌握复数的代数形式与其几何意义的相互转化并能解决相关的数学问题;

(3)从数学文化的视角理解复数概念,从知识普遍联系的视角研究数学问题,培养直观想象、数学抽象和数学运算等核心素养.

教学重点:复数的概念与运算.

教学难点:复数的代数形式与几何意义的转化与应用.

2.2 教学过程

2.2.1 知识回顾,追寻复数之源

师:万物皆数,数的重要性不言而喻,同学们对数系的扩充有什么认识和体会?

生1:最开始我学习了自然数,然后接触了负数,发现一个小的数减去一个大的数就不再是正数,再比如,生活中亏损现象、气温在零下等现象需要负数来表示.后面又学习了分数、有理数、无理数和实数,再后来又学习了复数.

师:请问从实数到复数的扩充,你对什么印象最深刻?

生1:古人为了解决三次方程发现了虚数单位——“i”,用来解决-1的平方根问题.

师:看来同学们对为什么学复数还是有一定的了解的,为了让大家能更深入理解i的意义,请大家观看视频并思考复数概念的几何意义.(观看阿甘德对复数虚数单位的诠释视频约5分钟,形象理解复数的几何意义,褪去i的神秘面纱.)

师生互动:通过视频我们了解到阿甘德极富创造力地解释了虚数单位的形的意义,但$\sqrt{-1}$这个符号显然跟之前负数不能开偶次方根冲突,数系扩充时要有相容性,因此欧拉用符号i来表示-1的平方根.直观来看,一个非零实数乘以i就离开了实数轴,构成了一类新的虚数,即从一维数轴上的数扩充为二维复平面上的数.

师:我统计分析了前测卷中同学们的答题情况,还是有些“迷思”现象,同学们对复数概念的理解还不够透彻.高斯指出,如果不只是将1、-1、i称为正、负和虚单位,还看成直、反、侧单位,那么人们对复数或许就不会产生种种阴暗神秘的印象.可见几何表示不仅使人们接受了虚数,且对它产生了全新的看法,如图3,为复数的代数形式与几何意义的示意图.

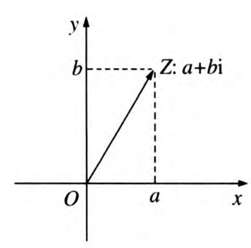

图3

师:同学们能否根据复数的几何意义对复数进行分类?

生2:可以根据复数对应的点在复平面上的位置,对复数进行分类,如图4所示.

$$z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})\begin{cases}b=0,\text{实数:点在实轴上}\\ b\neq0,\text{虚数}\begin{cases}a=0,\text{纯虚数:点在虚轴上(不包括原点)}\\ a\neq0,\text{非纯虚数:复平面内不在实轴、虚轴上的点}\end{cases}\end{cases}$$

图4

师：到19世纪中叶，哈密尔顿指出 $a+bi(a,b\in\mathbf{R})$ 中加号的使用只是历史的偶然，bi 并不能被加到 a 上去，而应看成有序数对 (a,b)，并证明了复数满足四则运算法则(PPT 呈现).

设计意图：从数学文化的视角适切融入数学史，介绍复数的诞生与发展的历史进程——图形表示、实际应用到严密的数学理论. 知识复习的过程隐含着复数的历史发展进程，通过前测卷学生的回答情况了解学情，紧扣概念理解的难点——对 i 的认识，融入阿甘德的旋转解释，结合复数代数形式与几何意义揭示其概念本质，认识复数知识的源与流.

2.2.2 概念辨析，理解复数之本

师：为了进一步加强对复数概念的理解，请同学们辨析以下问题.

例1 判断下列命题的真假，并简述理由：①若 $z_1{}^2+z_2{}^2=0$，则 $z_1=0$ 且 $z_2=0$；② $|z|^2=z^2$；③若 $z_1-z_2>0$，则 $z_1>z_2$；④若 $|z|<a(a>0)$，则 $-a<z<a$.

生3：①不对，如 $z_1=1,z_2=\mathrm{i},z_1{}^2+z_2{}^2=1+\mathrm{i}^2=0$.

生4：②不对，如 $z=\mathrm{i},|z|^2=1,z^2=-1$ 不相等.

师：实数集内成立的命题在复数集内未必成立，我们判断正误的关键点是什么？

生5：复数集内一个数的平方不一定是非负数，$|z|^2$ 只是复数模的平方，z^2 还有方向的旋转，我们要注意复数是一个有序数对，要充分考虑它的几何意义.

生6：③不对，如 $z_1=1+\mathrm{i},z_2=\mathrm{i},z_1-z_2=1>0$，但 $1+\mathrm{i}$ 和 i 无法比较大小.

师：为什么虚数不能比较大小？

师生互动：复数集内不能定义一个序关系使得它与加法和乘法相容，不能定义一个全序关系使得复数是一个有序域，有序域 F 的定义是，对任意 $a,b,c\in F$，满足下面条件，(ⅰ)有 $a>b$、$a<b$ 或 $a=b$ 三者恰有一个成立(三分性)；(ⅱ)若 $a>b,b>c$，则 $a>c$(传递性)；(ⅲ)若 $a<b$，则 $a+c<b+c$(加法保序性)；(ⅳ)若 $a<b$ 且 $c>0$，则 $ac<bc$(乘法保序性). 显然 $\mathrm{i}\neq0$，假设 $\mathrm{i}>0$，则 $\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}>0\cdot\mathrm{i}\Rightarrow-1>0$，假设 $\mathrm{i}<0$，则 $-\mathrm{i}>0\Rightarrow(-\mathrm{i})(-\mathrm{i})>0\cdot(-\mathrm{i})\Rightarrow-1>0$，不符合条件(ⅳ). 故虚数之间不能比较大小.

生7：④不对，如 $z=\mathrm{i},|z|=1<2$，但 i 与 ±2 之间不能比较大小.

师：$|z|<a(a>0)$ 的几何意义是什么？能否从"形"的角度来分析这个命题？

生8：这个不等式的几何意义是复数 z 的模小于正数 a，复数 z 对应点的轨迹为以原点为圆心、以正数 a 为半径的圆内的点构成的集合，不只是实轴上介于 $-a$ 到 a 的数.

设计意图：例1的探究过程没有局限于知识的回顾，并非将学过的内容简单重复一遍，而是力争突破新学阶段书本知识的局限. 通过①、②的辨析，学生意识到数系扩充后命题的真假要与实数严格区分，分析③时没有只是简单规定复数不能比较大小，而是深层次探讨复数概念的本质，分析②、④时启发学生从形的角度分析复数问题，强调了复数的几何意义.

2.2.3 问题解决，实现能力之助

例2 已知 $\frac{m+2}{m-2}$ 为纯虚数，(1)求复数 m 的模长；(2)若 $z=m+\mathrm{i}$，求复数 z 对应点的轨迹.

(1)生1：设 $m=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R},m\neq\pm2)$，则 $\frac{a+b\mathrm{i}+2}{a+b\mathrm{i}-2}=\frac{a^2-4+b^2-4b\mathrm{i}}{(a-2)^2+b^2}$ 为纯虚数，则有 $\begin{cases}a^2+b^2=4\\ b\neq0\end{cases}$，故 $|m|=2$ 且 $m\neq\pm2$.

师：这是思考复数问题的常规方法，通过复数除法运算化简，再结合纯虚数的概念得到复数 m 的模长. 同学们还有别的计算方法吗？

生2：$\frac{m+2}{m-2}$ 为纯虚数，则 $\frac{m+2}{m-2}+\frac{\overline{m}+2}{\overline{m}-2}=0$，则 $\frac{2m\cdot\overline{m}-8}{|m-2|^2}=0$，故 $|m|=2$ 且 $m\neq\pm2$.

师：这里的代换很巧妙，充分运用了共轭复数的运算性质，避开了繁难的运算.

生3：$\frac{m+2}{m-2}$ 为纯虚数，设 $\frac{m+2}{m-2}=k\mathrm{i},k\in\mathbf{R},k\neq0$，于是 $m+2=k\mathrm{i}(m-2)\Rightarrow m=\frac{-2-2k\mathrm{i}}{1-k\mathrm{i}}\Rightarrow|m|=2\cdot\left|\frac{1+k\mathrm{i}}{1-k\mathrm{i}}\right|=2\cdot\frac{|1+k\mathrm{i}|}{|1-k\mathrm{i}|}=2$.

师：从纯虚数概念出发，结合复数模的运算得到结论，切入点很好.

(2)生1：设 $z=x+y\mathrm{i}(x,y\in\mathbf{R},y\neq1)$，则 $m=x+(y-1)\mathrm{i}$，由(1)得 $x^2+(y-1)^2=4,y\neq1$，复数 z 对应点的轨迹是以 $(0,1)$ 为圆心，以2为半径的圆(去掉两点 $(\pm2,1)$).

师：将复数方程转换为普通方程，进而确定动点的轨迹是常规方法.

生2：$\begin{cases}z=m+\mathrm{i}\\ |m|=2\end{cases}\Rightarrow|z-\mathrm{i}|=2$，可得复数 z 对应点的轨迹是以 $(0,1)$ 为圆心、以2为半径的圆(去掉两点 $(\pm2,1)$).

师：这里的代入法很好！利用两个复数差的模的几何意义直接确定动点轨迹. 可见通过复数方程，我们也可以刻画动点的轨迹. 请大家思考以下问题.

例3 设 $z_1,z_2\in C$，实数 a、c 都大于0，若 $|z_1-z_2|=2c$，且复数 z 满足 $|z-z_1|+|z-z_2|=2a$，则在复平

面内复数 z 对应的点的轨迹是什么曲线?

师生互动:设复数 z_1,z_2 对应的点为 F_1,F_2,复数 z 对应的点为 P,依题意,$|PF_1|+|PF_2|=2a>0$,$|F_1F_2|=2c>0$,(1)当 $c>a$ 时,动点 P 不存在;(2)当 $c=a$ 时,动点 P 的轨迹为线段 F_1F_2;(3)当 $c<a$ 时,动点 P 是轨迹为 F_1、F_2 为焦点,以 $2a$ 为长轴长的椭圆.

师:平面几何中其他的动点轨迹怎样用复数形式表示?请同学们类比以上讨论,课后拓展思考.

设计意图:例2的一题多解、例3的分类讨论,充分体现并强调了数形结合思想对于研究复数问题的重要性.历史上直到复数几何意义的出现,数学家才真正理解复数,复平面的建立有助于复数理论的完善,而代数运算理论又促进了其几何意义的发展.因此,教学中体现复数代数表征与几何意义的相辅相成,这对深度理解复数概念与运算有重要意义,同时有助于培养学生直观想象和逻辑推理能力.

2.2.4 *拓展探究,深化复数之用*

师:19世纪后半叶,复数不仅为人们广泛接受,数学家们还研究出复数域,它拥有实数所不具备的对称性和完备性而被称为完美,复数在诸如代数、分析、几何、数论领域都扮演了重要角色.下面请同学们尝试运用复数知识解决以下问题.

例4 已知 z_1,z_2,z_3 是以原点为圆心的单位圆上的三个点对应的三个复数,$z_1+z_2+z_3=0$,证明:z_1,z_2 和 z_3 对应的点是等边三角形的三个顶点.

生1:设 z_1,z_2 和 z_3 对应的点分别为 A,B 和 C,由 $z_1+z_2+z_3=0$ 可知,$\triangle ABC$ 的重心为原点,而其外心也是原点,故$\triangle ABC$ 为等边三角形.

例5 求证斐波那契命题:对于任意不同的 $a,b,c,d\in\mathbf{N}^*$,至少存在两组数 $A,B\in\mathbf{N}^*$,使得$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=A^2+B^2$.

师生互动:实际上,斐波那契恒等式体现了复数方程 $|z_1|^2\cdot|z_2|^2=|z_1\cdot z_2|^2=|z_1\cdot\overline{z_2}|^2$.下面我们给出证明,取两个复数 $z_1=a+b\mathrm{i}$,$z_2=c+d\mathrm{i}$,$(a,b,c,d\in\mathbf{N}^*)$,则显然 $|z_1|^2\cdot|z_2|^2=(a^2+b^2)\cdot(c^2+d^2)$,又 $z_1\cdot z_2=(a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i})=(ac-bd)+(ad+bc)\mathrm{i}$,从而,$|z_1\cdot z_2|^2=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2=A_1{}^2+B_1{}^2$,其中 $A_1=|ac-bd|$,$B_1=ad+bc$.同理,$|z_1\cdot\overline{z_2}|^2=|\overline{z_1}\cdot z_2|^2=|ac+bd|^2+|bc-ad|^2=A_2{}^2+B_2{}^2$,其中 $A_2=ac+bd$,$B_2=|bc-ad|$.同学们可以课下证明这两组数是不同的.

设计意图:例3、例4、例5引导学生体会复数与其他知识的普遍联系和复数的应用价值,强化了学生运用复数的代数形式和几何意义解决问题的思维习惯.将复数知识的逻辑、历史和学生的认知结合起来,展开全方位、深层次的探讨,使得学生的认识和理解都能达到新的高度,同时也锻炼和提高了学生的数学抽象、直观想象和数学运算等核心素养.

2.2.5 *归纳总结,感悟复数之魅*

师:今天的这节复数复习课,大家有什么收获?

生1:巩固了复数的概念、运算,并结合复数的几何意义解题.

师:什么内容印象最为深刻?解题中有什么新的启发?

生2:印象最深刻的是阿甘德对虚数单位i的几何解释.解决复数问题可以从代数形式与几何意义两个方面分析求解,一个代数或者几何问题可以借助于复数这个工具来解决.

师:复数不仅在数学学科上有重要的应用价值,在其他学科领域也发挥着重要的作用,比如目前物理学的研究成果,复数是时空的数量关系,具体到电工学中复数表示交流电,虚数代表虚功;又如1772年,法国数学家达朗贝尔将复变函数理论应用于流体动力学;再如1772年,瑞士数学家兰伯特将复变函数理论应用于地图制作,他的二次投影理论也在航空与军事上起到重要作用.

3 教学反思与展望

在综合性较强的高三复习课中融入复数发展史,能以相对完整和合理的方式呈现复数知识的发展历程,帮助学生理解复数并以广阔的视野认识复数,展现数学知识的魅力,增强复习课的趣味性,学生的直观想象、数学运算、数学抽象等学科素养在教学中得到了训练与培养,反映在后测试卷上可以看出学生对复数概念和知识的理解有很大程度的提升.

当然,有几位学生认为这节复习课讲得过深,中间例题的分析节奏有点快,最后一道例题理解起来有点吃力,但他们同时表示课堂内容非常充实,课后继续加强理解收获会很大.可见复习课教学目标的制定、内容的选择也要基于学生学情,讲解的深入程度还需要根据学生的水平进行调整.

参考文献

[1] 汪晓勤.中学数学中的数学史[M].北京:科学出版社,2002.

[2] 彭刚,汪晓勤,程靖.数学史融入数学教学:意义与方式[J].成都师范学院学报,2016(1):115-120.

[3] 汪晓勤,沈中宇.数学史与高中数学教学[M].上海:华东师范大学出版社,2020.

[4] 王海青.数学史视角下"数系的扩充和复数的概念"的教学思考[J].数学通报,2017(4):15-19.

[5] 向荣,卢成娴,沈中宇.HPM视角下的复数序言课教学[J].中学数学月刊,2020(7):46-50.