江苏省仪征中学 2019 届高三下学期数学周末限时训练 1

数学 I

参考公式：样本数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的方差 $s^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$，其中 $\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ ．

一．填空题：本大题共 14 小题，每小题 5 分，共 70 分．请把答案填写在答题卡相应位置．

1. 已知集合 $A=\{0,1,2,3\}$， $B=\{x\,|\,0<x\leqslant 2\}$，则 $A\cap B=$_________．

2. 已知复数 $z=(2-\mathrm{i})^2$（i 是虚数单位），则 z 的模为_________．

3. 已知一组样本数据 5，4，x，3，6 的平均数为 5，则该组数据的方差为_________．

4. 运行如图所示的伪代码，则输出的结果 S 为_________．

```
I ← 1
While  I < 8
  I ← I + 2
  S ← 2I + 3
End While
Print  S
```

（第 4 题）

5. 若从 2，3，6 三个数中任取一个数记为 a，再从剩余的两个数中任取一个数记为 b，则“$\frac{a}{b}$是整数”的概率为___________．

6. 若抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点与双曲线 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 的右焦点重合，则实数 p 的值为___________．

7. 在等差数列$\{a_n\}$中，若 $a_5=\frac{1}{2}$，$8a_6+2a_4=a_2$，则$\{a_n\}$的前 6 项和 S_6 的值为___________．

8. 已知正四棱锥的底面边长为 $2\sqrt{3}$，高为 1，则该正四棱锥的侧面积为__________．

9. 已知 $a,b\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=(x-2)(ax+b)$ 为偶函数，且在 $(0,+\infty)$ 上是减函数，则关于 x 的不等式 $f(2-x)>0$ 的解集为_________．

10. 已知 $a>0$， $b>0$，且 $a+3b=\frac{1}{b}-\frac{1}{a}$，则 b 的最大值为_________．

11. 将函数 $f(x)=\sin 2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位得到函数 $g(x)$ 的图象，则以函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象的相邻三个交点为顶点的三角形的面积为_______________．

12. 在 $\triangle ABC$ 中， $AB=2$， $AC=3$， $\angle BAC=60^\circ$， P 为 $\triangle ABC$ 所在平面内一点，满足 $\overrightarrow{CP}=\frac{3}{2}\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PA}$，则 $\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{AB}$ 的值为____________．

13. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知圆 C_1： $x^2+y^2+2mx-(4m+6)y-4=0(m\in\mathbf{R})$ 与以 $C_2(-2,3)$ 为圆心的圆相交于 $A(x_1,y_1)$， $B(x_2,y_2)$ 两点，且满足 $x_1^2-x_2^2=y_2^2-y_1^2$，则实数 m 的值为_____________．

14. 已知 $x>0$， $y>0$， $z>0$，且 $x+\sqrt{3}y+z=6$，则 x^3+y^2+3z 的最小值为_________．

二．解答题：本大题共 6 小题，共计 90 分．请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或计算步骤．

15．（本小题满分 14 分）

在 $\triangle ABC$ 中，$\sin A=\dfrac{2}{3}$，$A\in(\dfrac{\pi}{2},\pi)$．

（1）求 $\sin 2A$ 的值；

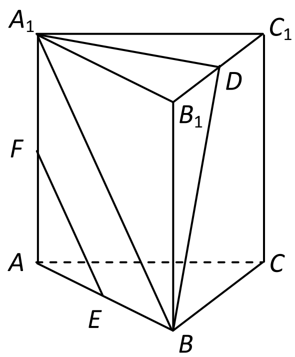
（2）若 $\sin B=\dfrac{1}{3}$，求 $\cos C$ 的值．

16．（本小题满分 14 分）

如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，D，E，F 分别是 B_1C_1，AB，AA_1 的中点．

（1）求证：EF ∥平面 A_1BD；

（2）若 $A_1B_1=A_1C_1$，求证：平面 $A_1BD\perp$ 平面 BB_1C_1C．



（第 16 题）

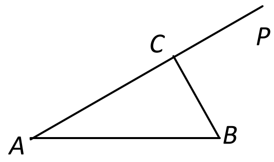
17.（本小题满分 **14** 分）

如图，某公园内有两条道路 AB，AP，现计划在 AP 上选择一点 C，新建道路 BC，并把 $\triangle ABC$ 所在的区域改造成绿化区域．已知 $\angle BAC=\dfrac{\pi}{6}$， $AB=2\ \mathrm{km}$．

（**1**）若绿化区域 $\triangle ABC$ 的面积为 **1** km^2，求道路 BC 的长度；

（**2**）若绿化区域 $\triangle ABC$ 改造成本为 **10** 万元/ km^2，新建道路 BC 成本为 **10** 万元/ km．

设 $\angle ABC=\theta$（$0<\theta\leqslant\dfrac{2\pi}{3}$），当 θ 为何值时，该计划所需总费用最小？



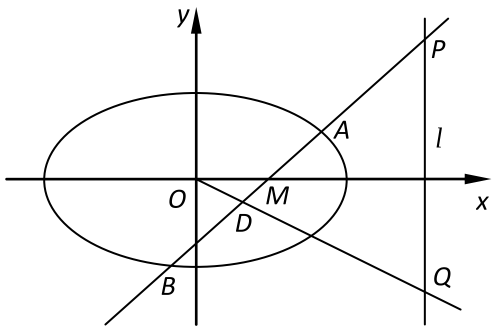
（第 17 题）

18.（本小题满分 **16** 分）

如图，在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，且右焦点到右准线 l 的距离为1．过 x 轴上一点 $M(m,0)$ (m 为常数，且 $m\in(0,2)$) 的直线与椭圆 C 交于 A,B 两点，与 l 交于点 P， D 是弦 AB 的中点，直线 OD 与 l 交于点 Q．

（**1**）求椭圆 C 的标准方程；

（**2**）试判断以 PQ 为直径的圆是否经过定点？若是，求出定点坐标；若不是，请说明理由．



(第 18 题)

19．（本小题满分 16 分）

已知函数 $f(x)=(x-a)\ln x\ (a\in\mathbf{R})$．

（1）若 $a=1$，求 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程；

（2）若对于任意的正数 x， $f(x)\geqslant 0$ 恒成立，求实数 a 的值；

（3）若函数 $f(x)$ 存在两个极值点，求实数 a 的取值范围．

20．（本小题满分 16 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 满足对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_n(q^n a_n-1)+2q^n a_n a_{n+1}=a_{n+1}(1-q^n a_{n+1})$，且 $a_{n+1}+a_n\neq 0$，其中 $a_1=2$，$q\neq 0$．记 $T_n=a_1+qa_2+q^2a_3+\cdots+q^{n-1}a_n$．

（1）若 $q=1$，求 T_{2019} 的值；

（2）设数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=(1+q)T_n-q^n a_n$．

① 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式；

② 若数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_1=1$，且当 $n\geqslant 2$ 时，$c_n=2^{b_{n-1}}-1$，是否存在正整数 k，t，使 c_1，c_k-c_1，c_t-c_k 成等比数列？若存在，求出所有 k，t 的值；若不存在，说明理由．

数学Ⅱ(附加题)

21．A．[选修 4-2：矩阵与变换]（本小题满分 10 分）

已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 8\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$.

B．[选修 4-4：坐标系与参数方程]（本小题满分 10 分）

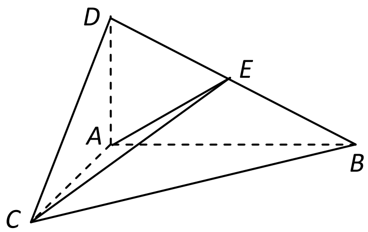
在极坐标系中，曲线 C: $\rho=2\cos\theta$. 以极点为坐标原点，极轴为 x 轴非负半轴建立平面直角坐标系 xOy，设过点 $A(3,0)$ 的直线 l 与曲线 C 有且只有一个公共点，求直线 l 的斜率.

22.（本小题满分 10 分）

如图, 在三棱锥 $D-ABC$ 中，$DA\perp$ 平面 ABC，$\angle CAB=90^{\circ}$，且 $AC=AD=1$，$AB=2$，E 为 BD 的中点.

（1）求异面直线 AE 与 BC 所成角的余弦值;

（2）求二面角 $A-CE-B$ 的余弦值.



（第 22 题）

23.（本小题满分 10 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\dfrac{1}{3}$， $a_{n+1}=-2a_n{}^2+2a_n$， $n\in\mathbf{N}^*$.

（1）用数学归纳法证明：$a_n\in(0,\dfrac{1}{2})$；

（2）令 $b_n=\dfrac{1}{2}-a_n$，证明：$\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{b_i}\geqslant 3^{n+1}-3$.

江苏省仪征中学 2019 届高三下学期数学周末限时训练 1 参考答案

一．填空题：

1． $\{1,2\}$　2．5　3．2　4．21　5．$\dfrac{1}{3}$　6．4　7．$\dfrac{15}{2}$　8．$8\sqrt{3}$

9．$(0,4)$　10．$\dfrac{1}{3}$　11．$\dfrac{\sqrt{3}\pi}{2}$　12．-1　13．-6　14．$\dfrac{37}{4}$

二．解答题：

15．（1）由 $\sin A=\dfrac{2}{3}$， $A\in(\dfrac{\pi}{2},\pi)$，则 $\cos A=-\sqrt{1-\sin^2 A}=-\sqrt{1-(\dfrac{2}{3})^2}=-\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，…………2 分

所以 $\sin 2A=2\sin A\cos A=-\dfrac{4\sqrt{5}}{9}$． ……………………………………………………6 分

（2）由 $A\in(\dfrac{\pi}{2},\pi)$，则 B 为锐角，

又 $\sin B=\dfrac{1}{3}$，所以 $\cos B=\sqrt{1-(\dfrac{1}{3})^2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$， ……………………………………………8 分

所以 $\cos C=-\cos(A+B)=-(\cos A\cos B-\sin A\sin B)$ ……………………………12 分

$=-(-\dfrac{\sqrt{5}}{3}\times\dfrac{2\sqrt{2}}{3}-\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3})=\dfrac{2\sqrt{10}+2}{9}$． ………………………………………………14 分

16．（1）因为 E，F 分别是 AB，AA_1 的中点，所以 $EF\ /\!/\ A_1B$． ………………………3 分

因为 $EF\not\subset$ 平面 A_1BD， $A_1B\subset$ 平面 A_1BD，

所以 $EF\ /\!/$ 平面 A_1BD． …………………………6 分

（2）在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $BB_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1$，

因为 $A_1D\subset$ 平面 $A_1B_1C_1$，所以 $BB_1\perp A_1D$． ……8 分

因为 $A_1B_1=A_1C_1$，且 D 是 B_1C_1 的中点，

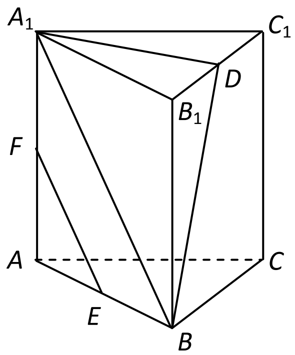
所以 $A_1D\perp B_1C_1$． ………………………………10 分

因为 $BB_1\cap B_1C_1=B_1$， B_1C_1，$BB_1\subset$ 平面 BB_1C_1C，

所以 $A_1D\perp$ 平面 BB_1C_1C． ………………………12 分

因为 $A_1D\subset$ 平面 A_1BD，

所以平面 $A_1BD\perp$ 平面 BB_1C_1C． …………………14 分



17．（1）因为在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle BAC=\dfrac{\pi}{6}$， $AB=2\ \text{km}$，

所以由 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}\times AB\times AC\times\sin\dfrac{\pi}{6}=1$，

解得 $AC=2$． ……………………………………………………………………2 分

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得： $BC^2=AB^2+AC^2-2\times AB\times AC\times\cos\dfrac{\pi}{6}$

$=2^2+2^2-2\times2\times2\times\cos\dfrac{\pi}{6}=8-4\sqrt{3}$， ……………………………………………4 分

所以 $BC=\sqrt{8-4\sqrt{3}}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$． ……………………………………………5 分

（2）由 $\angle ABC=\theta$，则 $\angle ACB=\pi-\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)$， $0<\theta\leqslant\dfrac{2\pi}{3}$．

在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC=\dfrac{\pi}{6}$， $AB=2\ \text{km}$，由正弦定理得 $\dfrac{AC}{\sin B}=\dfrac{BC}{\sin A}=\dfrac{AB}{\sin C}$，

所以 $BC=\dfrac{1}{\sin(\theta+\dfrac{\pi}{6})}$， $AC=\dfrac{2\sin\theta}{\sin(\theta+\dfrac{\pi}{6})}$． ……………………………………7 分

记该计划所需费用为 $F(\theta)$，

则 $F(\theta)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2\sin\theta}{\sin(\theta+\dfrac{\pi}{6})}\times2\times\dfrac{1}{2}\times10+\dfrac{1}{\sin(\theta+\dfrac{\pi}{6})}\times10=\dfrac{10(\sin\theta+1)}{\sin(\theta+\dfrac{\pi}{6})}$ $(0<\theta\leqslant\dfrac{2\pi}{3})$．

…………………………………………………………………………………10 分

令 $f(\theta)=\dfrac{\sin\theta+1}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\dfrac{1}{2}\cos\theta}$，则 $f'(\theta)=\dfrac{\sin(\theta-\dfrac{\pi}{3})+\dfrac{1}{2}}{(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\dfrac{1}{2}\cos\theta)^2}$， ………………11 分

由 $f'(\theta)=0$，得 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$．所以当 $\theta\in(0,\dfrac{\pi}{6})$ 时， $f'(\theta)<0$， $f(\theta)$ 单调递减；

当 $\theta\in(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{2\pi}{3})$ 时， $f'(\theta)>0$， $f(\theta)$ 单调递增． ………………………………12 分

所以 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ 时，该计划所需费用最小． ……………………………………14 分

18．（1）由题意，得 $\begin{cases}e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \dfrac{a^2}{c}-c=1\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=\sqrt{2}\\ c=1\end{cases}$，所以 $a^2=2,b^2=1$，

所以椭圆C的标准方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$． ………………………………………4分

（2）由题意，当直线 AB 的斜率不存在或为零时显然不符合题意；

所以设 AB 的斜率为 k，则直线 AB 的方程为 $y=k(x-m)$，

又准线方程为 $x=2$，

所以 P 点的坐标为 $P\left(2,k(2-m)\right)$， ………………………………………………6分

由 $\begin{cases}y=k(x-m)\\ x^2+2y^2=2\end{cases}$ 得， $x^2+2k^2(x-m)^2=2$，

即 $(1+2k^2)x^2-4k^2mx+2k^2m^2-2=0$

所以 $x_D=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4k^2m}{2k^2+1}=\dfrac{2k^2m}{2k^2+1}$， $y_D=k\left(\dfrac{2k^2m}{2k^2+1}-m\right)=-\dfrac{km}{2k^2+1}$， …………8分

所以 $k_{OD}=-\dfrac{1}{2k}$，

从而直线 OD 的方程为 $y=-\dfrac{1}{2k}x$，（也可用点差法求解）

所以 Q 点的坐标为 $Q\left(2,-\dfrac{1}{k}\right)$， …………………………………………………10分

所以以 P,Q 为直径的圆的方程为 $\left(x-2\right)^2+\left(y-k(2-m)\right)\left(y+\dfrac{1}{k}\right)=0$，

即 $x^2-4x+2+m+y^2-\left(k(2-m)-\dfrac{1}{k}\right)y=0$， ………………………………14分

因为该式对 $\forall k \neq 0$ 恒成立，令 $y=0$，得 $x=2\pm\sqrt{2-m}$，

所以以 PQ 为直径的圆经过定点 $(2\pm\sqrt{2-m},0)$．……………………………16分

19．（1）因为 $f(x)=(x-a)\ln x\ (a\in\mathbf{R})$，所以当 $a=1$ 时，$f(x)=(x-1)\ln x$，

则 $f'(x)=\ln x+1-\dfrac{1}{x}$，………………………………………………………1 分

当 $x=1$ 时，$f(1)=0, f'(1)=0$，

所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y=0$；………………………………………3 分

（2）因为对于任意的正数 x，$f(x)\geqslant 0$ 恒成立，

所以当 $\ln x=0$ 时，即 $x=1$ 时，$f(x)=0$，$a\in\mathbf{R}$；……………………………5 分

当 $\ln x>0$ 时，即 $x>1$ 时，$x\geqslant a$ 恒成立，所以 $a\leqslant 1$；………………………6 分

当 $\ln x\leqslant 0$ 时，即 $x<1$ 时，$x\leqslant a$ 恒成立，所以 $a\geqslant 1$，

综上可知，对于任意的正数 x，$f(x)\geqslant 0$ 恒成立，$a=1$．……………………7 分

（3）因为函数 $f(x)$ 存在两个极值点，

所以 $f'(x)=\ln x-\dfrac{a}{x}+1$ 存在两个不相等的零点．

设 $g(x)=\ln x-\dfrac{a}{x}+1$，则 $g'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{a}{x^2}=\dfrac{x+a}{x^2}$．…………………………………8 分

当 $a\geqslant 0$ 时，$g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 单调递增，至多一个零点．…………………9 分

当 $a<0$ 时，因为 $x\in(0,-a)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，

$x\in(-a,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，

所以 $x=-a$ 时，$g(x)_{\min}=g(-a)=\ln(-a)+2$．…………………………………11 分

因为 $g(x)$ 存在两个不相等的零点，所以 $\ln(-a)+2<0$，解得 $-\mathrm{e}^{-2}<a<0$．

因为 $-\mathrm{e}^{-2}<a<0$，所以 $-\dfrac{1}{a}>\mathrm{e}^2>-a$．

因为 $g(-\dfrac{1}{a})=\ln(-\dfrac{1}{a})+a^2+1>0$，所以在 $(-a,+\infty)$ 上存在一个零点．………13 分

因为 $-\mathrm{e}^{-2}<a<0$，所以 $a^2<-a$．又因为 $g(a^2)=\ln a^2-\dfrac{1}{a}+1=2\ln(-a)+\dfrac{1}{-a}+1$，

设 $t=-a$，则 $y=2\ln t+\dfrac{1}{t}+1(0<t<\dfrac{1}{\mathrm{e}^2})$，因为 $y'=\dfrac{2t-1}{t^2}<0$，

所以 $y=2\ln t+\dfrac{1}{t}+1(0<t<\dfrac{1}{\mathrm{e}^2})$ 单调递减，所以 $y>2\ln\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}+\mathrm{e}^2+1=\mathrm{e}^2-3>0$，

所以 $g(a^2)=\ln a^2-\dfrac{1}{a}+1>0$，所以在 $(0,-a)$ 上存在一个零点．

综上可知：$-\mathrm{e}^{-2}<a<0$．……………………………………………………………16 分

20．（1）当 $q=1$ 时，由 $a_n\left(q^n a_n-1\right)+2q^n a_n a_{n+1}=a_{n+1}\left(1-q^n a_{n+1}\right)$，

得 $\left(a_{n+1}+a_n\right)^2=a_{n+1}+a_n$，

又 $a_{n+1}+a_n\neq 0$，

所以 $a_{n+1}+a_n=1$，………………………………………………………………2分

又 $a_1=2$，

所以 $T_{2019}=a_1+(a_2+a_3)+(a_4+a_5)+\cdots(a_{2018}+a_{2019})=1011$．…………………4分

（2）由 $a_n\left(q^n a_n-1\right)+2q^n a_n a_{n+1}=a_{n+1}\left(1-q^n a_{n+1}\right)$，得 $q^n\left(a_{n+1}+a_n\right)^2=a_{n+1}+a_n$，

又 $a_{n+1}+a_n\neq 0$，所以 $a_{n+1}+a_n=\dfrac{1}{q^n}$，……………………………………………6分

又因为$T_n=a_1+qa_2+q^2a_3+\cdots+q^{n-1}a_n$，

所以$qT_n=qa_1+q^2a_2+q^3a_3+\cdots+q^na_n$，

所以$\left(1+q\right)T_n=a_1+q(a_1+a_2)+q^2(a_2+a_3)+q^3(a_3+a_4)+\cdots+q^{n-1}(a_{n-1}+a_n)+q^na_n$，

$b_n=(1+q)T_n-q^na_n=a_1+1+1+\cdots+1+q^na_n-q^na_n=a_1+n-1=n+1$，

所以$b_n=n+1$． ……………………………………………………………10 分

②由题意，得$c_n=2^{b_{n-1}}-1=2^n-1$，$n\geqslant 2$，

因为c_1，c_k-c_1，c_t-c_k成等比数列，

所以$(c_k-c_1)^2=c_1(c_t-c_k)$，即$(2^k-2)^2=2^t-2^k$， ……………………………………12 分

所以$2^t=(2^k)^2-3\cdot 2^k+4$，即$2^{t-2}=(2^{k-1})^2-3\cdot 2^{k-2}+1(*)$.

由于$c_k-c_1\neq 0$，所以$k\neq 1$，即$k\geq 2$.

当$k=2$时，$2^t=8$，得$t=3$. ……………………………………………………14 分

当$k\geq 3$时，由(*)，得$(2^{k-1})^2-3\cdot 2^{k-2}+1$为奇数，

所以$t-2=0$，即$t=2$，代入(*)得$2^{2k-2}-3\cdot 2^{k-2}=0$，即$2^k=3$，此时$k$无正整数解.

综上，$k=2$，$t=3$. ………………………………………………………………16 分

21．**A**． 易得$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ 1 & 0\end{bmatrix}$， …………………………………………………5 分

所以$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-\frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{5}{2} & 4\\ 2 & 0\end{bmatrix}$. ………………………………10 分

B． 曲线C：$\rho=2\cos\theta$的普通方程为$\left(x-1\right)^2+y^2=1$， …………………………4 分

设过点$B\left(3,0\right)$的直线l的普通方程为$x=my+3$，

因为直线l与曲线C有且只有一个公共点，

所以$\dfrac{\left|1-3\right|}{\sqrt{1+m^2}}=1$，解得$m=\pm\sqrt{3}$. …………………………………………………8 分

从而直线l的斜率为$\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. ……………………………………………………10 分

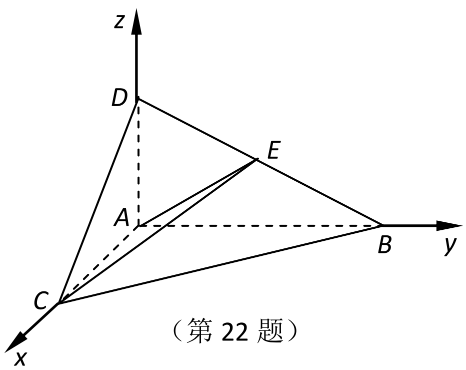
22．因为$DA\perp$平面ABC，$\angle CAB=90^\circ$，所以可以以A为坐标原点，建立如图所示的空间直角坐标系$A-xyz$.

因为$AC=AD=1$，$AB=2$，

所以$A(0,0,0)$，$C(1,0,0)$，$B(0,2,0)$，$D(0,0,1)$，

因为点E为线段BD的中点，

所以$E(0,1,\frac{1}{2})$.



（第 22 题）

（1）$\overrightarrow{AE}=(0,1,\frac{1}{2})$，$\overrightarrow{BC}=(1,-2,0)$，

所以$\cos\langle\overrightarrow{AE},\overrightarrow{BC}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{AE}\bullet\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AE}||\overrightarrow{BC}|}=\dfrac{-2}{\sqrt{\frac{5}{4}}\times\sqrt{5}}=-\dfrac{4}{5}$，

所以异面直线AE与BC所成角的余弦值为$\dfrac{4}{5}$…………5 分

（2）设平面ACE的法向量为$\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$，

因为 $\overrightarrow{AC}=(1,0,0)$， $\overrightarrow{AE}=(0,1,\frac{1}{2})$，

所以 $\boldsymbol{n}_1\bullet\overrightarrow{AC}=0$， $\boldsymbol{n}_1\bullet\overrightarrow{AE}=0$，即 $x=0$ 且 $y+\frac{1}{2}z=0$，取 $y=1$，得 $x=0$， $z=-2$，

所以 $\boldsymbol{n}_1=(0,1,-2)$ 是平面 ACE 的一个法向量.

设平面 BCE 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x,y,z)$，

因为 $\overrightarrow{BC}=(1,-2,0)$， $\overrightarrow{BE}=(0,-1,\frac{1}{2})$，

所以 $\boldsymbol{n}_2\bullet\overrightarrow{BC}=0$， $\boldsymbol{n}_2\bullet\overrightarrow{BE}=0$，

即 $x-2y=0$ 且 $-y+\frac{1}{2}z=0$，取 $y=1$，得 $x=2$， $z=2$，

所以 $\boldsymbol{n}_2=(2,1,2)$ 是平面 BCE 的一个法向量.

所以 $\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{-3}{\sqrt{5}\times\sqrt{9}}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$. ……………………………………8 分

所以二面角 $A-CE-B$ 的余弦值为 $-\frac{\sqrt{5}}{5}$. ………………………………………10 分

23.（1）证明：当 $n=1$ 时， $a_1=\frac{1}{3}\in(0,\frac{1}{2})$，结论显然成立；

假设当 $n=k,k\geqslant2,k\in\mathbf{N}^*$ 时， $a_k\in(0,\frac{1}{2})$，

则当 $n=k+1$ 时， $a_{k+1}=-2a_k{}^2+2a_k=-2(a_k-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}\in(0,\frac{1}{2})$，

综上， $a_n\in(0,\frac{1}{2})$……………………………………………………………………4 分

（2）由（1）知， $a_n\in(0,\frac{1}{2})$，所以 $b_n=\frac{1}{2}-a_n\in(0,\frac{1}{2})$.

因为 $a_{n+1}=-2a_n{}^2+2a_n$，

所以 $\frac{1}{2}-a_{n+1}=\frac{1}{2}-(-2a_n{}^2+2a_n)=2a_n{}^2-2a_n+\frac{1}{2}=2(a_n-\frac{1}{2})^2$，

即 $b_{n+1}=2b_n{}^2$，

于是 $\log_2 b_{n+1}=2\log_2 b_n+1$，

所以 $(\log_2 b_{n+1}+1)=2(\log_2 b_n+1)$，

故 $\{\log_2 b_n+1\}$ 构成以 2 为公比的等比数列，其首项为 $\log_2 b_1+1=\log_2\frac{1}{6}+1=\log_2\frac{1}{3}$.

于是 $\log_2 b_n+1=(\log_2\frac{1}{3})\cdot2^{n-1}$，从而 $\log_2(2b_n)=(\log_2\frac{1}{3})\cdot2^{n-1}=\log_2(\frac{1}{3})^{2^{n-1}}$，

所以 $2b_n=(\frac{1}{3})^{2^{n-1}}$，即 $b_n=\frac{(\frac{1}{3})^{2^{n-1}}}{2}$，于是 $\frac{1}{b_n}=2\cdot3^{2^{n-1}}$，………………………………8 分

因为当 $i=1,2$ 时， $2^{i-1}=i$，

当 $i\geqslant3$ 时， $2^{i-1}=(1+1)^{i-1}=C_{i-1}^0+C_{i-1}^1+\cdots+C_{i-1}^{i-1}>C_{i-1}^0+C_{i-1}^1=i$，

所以对 $\forall i\in\mathbf{N}^*$，有 $2^{i-1}\geqslant i$，所以 $3^{2^{i-1}}\geqslant3^i$，所以 $\frac{1}{b_i}=2\cdot3^{2^{i-1}}\geqslant2\cdot3^i$，

从而$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{b_i}=\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\cdots+\frac{1}{b_n}\geqslant 2(3^1+3^2+\cdots+3^n)=2\times\frac{3(1-3^n)}{1-3}=3^{n+1}-3$……….10 分