圆锥曲线的焦点弦长新解

张鹏举

关于直线与圆锥曲线相交求弦长，通用方法是将直线$y=kx+b$代入曲线方程，化为关于 x 的一元二次方程，设出交点坐标，利用韦达定理及弦长公式$\sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}$求出弦长，这种整体代换，设而不求的思想方法对于求直线与曲线相交弦长是十分有效的，然而对于过焦点的圆锥曲线弦长求解利用这种方法相比较而言有点繁琐，利用圆锥曲线定义及有关定理导出各种曲线的焦点弦长公式就更为简捷。

一．椭圆的焦点弦长

若椭圆方程为$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，半焦距为$c>0$，焦点$F_1(-c,\ 0)$、$F_2(c,\ 0)$，设过$F_1$的直线$l$的倾斜角为$\alpha$，$l$交椭圆于 A、B 两点，求弦长$|AB|$。

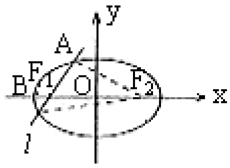

图 1

解：连结F_2A、F_2B，设$|F_1A|=x$，$|F_1B|=y$，由椭圆定义得

$|F_2A|=2a-x$，$|F_2B|=2a-y$，由余弦定理得

$x^2+(2c)^2-2x\cdot 2c\cdot\cos\alpha=(2a-x)^2$，整理可得$x=\dfrac{b^2}{a-c\cos\alpha}$，同理可求得

$y=\dfrac{b^2}{a+c\cos\alpha}$，则弦长

$$|AB|=x+y=\frac{b^2}{a-c\cos\alpha}+\frac{b^2}{a+c\cos\alpha}=\frac{2ab^2}{a^2-c^2\cos^2\alpha}$$。

同理可求得焦点在 y 轴上的过焦点弦长为$|AB|=\dfrac{2ab^2}{a^2-c^2\sin^2\alpha}$（a 为长半轴，b 为短半轴，c 为半焦距）

结论：椭圆过焦点弦长公式：

$$|AB|=\begin{cases}\dfrac{2ab^2}{a^2-c^2\cos^2\alpha}(\text{焦点在}x\text{轴上})\\ \dfrac{2ab^2}{a^2-c^2\sin^2\alpha}(\text{焦点在}y\text{轴上})\end{cases}$$

二. 双曲线的焦点弦长

设双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$，其中两焦点坐标为$F_1(-c,\ 0)$，$F_2(c,\ 0)$，过$F_1$的直线$l$的倾斜角为$\alpha$，交双曲线于 A、B 两点，求弦长|AB|。

解：（1）当$\arctan\dfrac{b}{a}<\alpha<\pi-\arctan\dfrac{b}{a}$时，（如图 2）直线$l$与双曲线的两个交点 A、B 在同一交点上，连$F_2A$，$F_2B$，设$|F_1A|=x$，$|F_1B|=y$，由双曲线定义可得$|F_2A|=2a+x$，$|F_2B|=2a+y$，由余弦定理可得

$x^2+(2c)^2-2x\cdot 2c\cdot\cos\alpha=(2a+x)^2$整理可得$x=\dfrac{b^2}{a+c\cdot\cos\alpha}$，同理

$y=\dfrac{b^2}{a-c\cdot\cos\alpha}$，则可求得弦长

$|AB|=x+y=\dfrac{b^2}{a+c\cdot\cos\alpha}+\dfrac{b^2}{a-c\cdot\cos\alpha}=\dfrac{2ab^2}{a^2-c^2\cdot\cos^2\alpha}$。

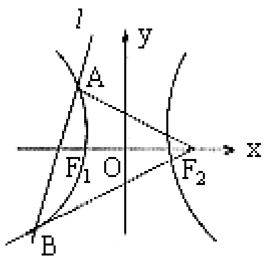

图 2

（2）当 $0 \le \alpha < \arctan\dfrac{b}{a}$ 或 $\pi - \arctan\dfrac{b}{a} < \alpha < \pi$ 时，如图 3，直线 l 与双曲线交点 A、B 在两支上，连 F_2A、F_2B，设 $|F_1A| = x$，$|F_1B| = y$，则 $|F_2A| = 2a + x$，$|F_2B| = y - 2a$，由余弦定理可得 $x^2 + (2c)^2 - 2x \cdot 2c \cdot \cos\alpha = (2a + x)^2$，

$y^2 + (2c)^2 - 2y \cdot 2c \cdot \cos(\pi - \alpha) = (y - 2a)^2$

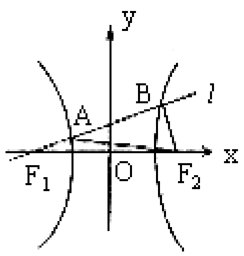

图 3

整理可得 $x = \dfrac{b^2}{a + c \cdot \cos\alpha}$，$y = \dfrac{b^2}{c \cdot \cos\alpha - a}$，则

$$|AB| = -x + y = \frac{b^2}{c \cdot \cos\alpha - a} - \frac{b^2}{a + c \cdot \cos\alpha} = \frac{2ab^2}{c^2 \cdot \cos^2\alpha - a^2}$$

因此焦点在 x 轴的焦点弦长为

$$|AB| = \begin{cases} \dfrac{2ab^2}{a^2 - c^2\cos^2\alpha} (\arctan\dfrac{b}{a} < \alpha < \pi - \arctan\dfrac{b}{a}) \\ \dfrac{2ab^2}{c^2\cos^2\alpha - a^2} (0 \le \alpha < \arctan\dfrac{b}{a} \text{或} \pi - \arctan\dfrac{b}{a} < \alpha < \pi) \end{cases}$$

同理可得焦点在 y 轴上的焦点弦长公式

$$|AB|=\begin{cases}\dfrac{2ab^2}{a^2-c^2\sin^2\alpha}(0\le\alpha<\arctan\dfrac{a}{b}\text{或}\pi-\arctan\dfrac{a}{b}<\alpha<\pi)\\ \dfrac{2ab^2}{c^2\sin^2\alpha-a^2}(\arctan\dfrac{a}{b}<\alpha<\pi-\arctan\dfrac{a}{b})\end{cases}$$

其中 a 为实半轴，b 为虚半轴，c 为半焦距，α 为 AB 的倾斜角。

三. 抛物线的焦点弦长

若抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 与过焦点 $F(\frac{p}{2},0)$ 的直线 l 相交于 A、B 两点，若 l 的倾斜角为 α，求弦长|AB|？（图 4）

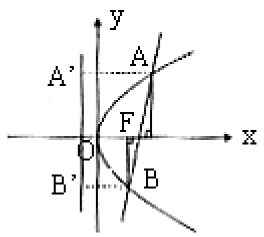

图 4

解:过A、B两点分别向x轴作垂线 AA_1、BB_1，A_1、B_1 为垂足,设 $|FA|=x$, $|FB|=y$,

则点 A 的横坐标为 $\frac{p}{2}+x\cdot\cos\alpha$，点 B 横坐标为 $\frac{p}{2}-y\cdot\cos\alpha$，由抛物线定义可得

$$\frac{p}{2}+x\cdot\cos\alpha+\frac{p}{2}=x;\quad \frac{p}{2}-y\cdot\cos\alpha+\frac{p}{2}=y$$

即 $x=\dfrac{p}{1-\cos\alpha}$，$y=\dfrac{p}{1+\cos\alpha}$

则 $x+y=\dfrac{p}{1-\cos\alpha}+\dfrac{p}{1+\cos\alpha}=\dfrac{2p}{1-\cos^2\alpha}=\dfrac{2p}{\sin^2\alpha}$

同理 $y^2=2px$ 的焦点弦长为 $|AB|=\dfrac{2|p|}{\sin^2\alpha}$

$x^2 = 2py$ 的焦点弦长为 $|AB| = \frac{2|p|}{\cos^2\alpha}$，所以抛物线的焦点弦长为

$$|AB| = \begin{cases} \frac{2|p|}{\sin^2\alpha} (焦点在x轴上) \\ \frac{2|p|}{\cos^2\alpha} (焦点在y轴上) \end{cases}$$

由以上三种情况可知利用直线倾斜角求过焦点的弦长，非常简单明确，应予以掌握。