

椭圆的标准方程与几何性质探析

知识点：

1. 椭圆的定义
2. 椭圆的标准方程
3. 椭圆的几何性质

小题热身：

1. 已知 F 是椭圆 $5x^2 + 9y^2 = 45$ 的左焦点， P 是此椭圆上的动点， $A(1,1)$ 是一定点，则 $PA + PF$ 的最大值为_____，最小值为_____.
2. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ， P 为椭圆上一点，则 $PF_1 \cdot PF_2$ 的取值范围为_____.
3. 在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，已知 $(1, e)$ 和 $\left(e, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (其中 e 为椭圆的离心率)，则椭圆的方程为_____.
4. 在平面直角坐标系 xOy 中， F 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点，直线 $y = \frac{b}{2}$ 与椭圆交于 B, C 两点，且 $\angle BFC = 90^\circ$ ，则该椭圆的离心率为_____.
5. 美学四大构件：史诗，音乐，造型（绘画，建筑等）和数学.素描是学习绘画的必要一步，它包括了明暗素描和结构素描，而学习几何体结构素描是学习素描最重要一步.某同学在画“切面圆柱体”（用与圆柱底面不平行的平面去截圆柱，底面与截面之间的部分叫做切面圆柱体）的过程中，发现“切面”是一个椭圆，若“切面”所在平面与底面成 60° 角，则该椭圆的离心率为_____.
6. 已知椭圆 $G: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 $F(3, 0)$ ，过点 F 的直线交椭圆于 A, B 两点. 若 AB 的中点坐标为 $(1, -1)$ ，则 G 的方程为 ()
 A. $\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{36} = 1$ B. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$ C. $\frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{18} = 1$ D. $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$

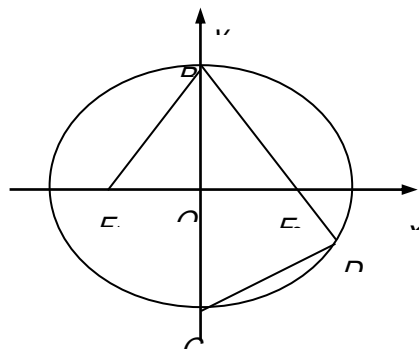
例题讲解：

例 1 (1) 如图，在平面直角坐标系 xOy 中， F_1, F_2 分别为椭圆

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点， B, C 分别为椭圆的上、下

顶点，直线 BF_2 与椭圆的另一交点为 D 。

若 $\tan \angle F_1BO = \frac{3}{4}$ ，则直线 CD 的斜率为_____。



(2) 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ， A, B 是椭圆的左、右顶点，

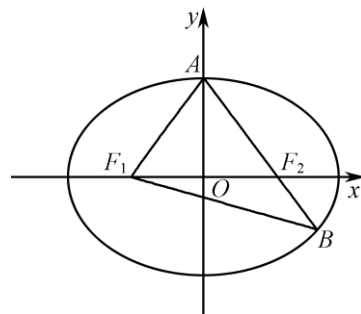
P 是椭圆上不同于 A, B 的一点，直线 PA, PB 的倾斜角分别为 α, β ，则 $\frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} =$ _____。

例 2. 如图，已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ ， F_1, F_2 分别为椭圆的左、右焦点，

A 为椭圆的上顶点，直线 AF_2 交椭圆于另一点 B 。

(1) 若 $\angle F_1AB = 90^\circ$ ，求椭圆的离心率；

(2) 若椭圆的焦距为 2，且 $\vec{AF_2} = 2\vec{F_2B}$ ，求椭圆的方程。



归纳小结：

巩固练习：

1. 已知椭圆 C 的焦点为 $F_1(-1,0)$, $F_2(1,0)$, 过 F_2 的直线与 C 交于 A, B 两点.

若 $|AF_2| = 2|F_2B|$, $|AB| = |BF_1|$, 则椭圆 C 的方程为 ()

A. $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ B. $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ C. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ D. $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$

2. 已知点 $P(n, 4)$ 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上一点, F_1, F_2 是椭圆的两个焦点,

如 $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆的直径为 3, 则此椭圆的离心率为 ()

A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{5}{7}$

3. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左右焦点分别为 $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$,

若椭圆上存在点 P , 使 $PF_1 = 3PF_2$, 则该椭圆离心率的取值范围为 ()

A. $(0, \frac{1}{2})$ B. $(0, \frac{1}{2}]$ C. $[\frac{1}{2}, 1)$ D. $(\frac{1}{2}, 1)$

4. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 的右焦点为 F , 点 $A(0, 2)$, 点 P 是该椭圆上的动点,

则 $\triangle PAF$ 周长的最大值为 ()

A. $2\sqrt{2} + 2\sqrt{5}$ B. $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ C. $2\sqrt{2} + \sqrt{5}$ D. $\sqrt{2} + 2\sqrt{5}$

5. (多选题) 我们通常称离心率为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 的椭圆为“黄金椭圆”.

如图, 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, A_1, A_2, B_1, B_2 为顶点, F_1, F_2 为焦点, P 为椭圆上一点,

满足下列条件能使椭圆 C 为“黄金椭圆”的有 ()

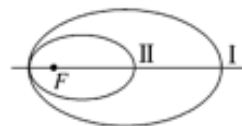
A. $|A_1F_1|, |F_1F_2|, |F_2A_2|$ 为等比数列 B. $\angle F_1B_1A_2 = 90^\circ$
C. $PF_1 \perp x$ 轴, 且 $PO \parallel A_2B_1$ D. 四边形 $A_1B_2A_2B_1$ 的内切圆过焦点 F_1, F_2

6. (多选题) 如图, 椭圆 I 与 II 有公共的左顶点和左焦点, 且椭圆 II 的右顶

点为椭圆 I 的中心. 设椭圆 I 与 II 的长半轴长分别为 a_1 和 a_2 , 半焦距分别为

c_1 和 c_2 , 离心率分别为 e_1, e_2 , 则下列结论正确的是 ()

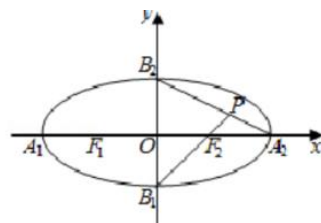
A. $a_1 + c_1 > 2(a_2 + c_2)$ B. $a_1 - c_1 = a_2 - c_2$
C. $a_1c_2 > a_2c_1$ D. $e_1 = \frac{e_2 + 1}{2}$



7. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 外一点 M 关于椭圆的左、右焦点的对称点分别为 A, B ，点 N 满足线段 MN 的中点在椭圆上，则 $AN + BN$ 的值为_____.

8. 在平面直角坐标系 xOy 中，设 F_1, F_2 分别是椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 的左、右焦点， P 为椭圆上任一点，点 M 的坐标为 $(6, 4)$ ，则 $PM - PF_1$ 的最小值为_____.

9. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中， A_1, A_2, B_1, B_2 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的四个顶点， F 为其右焦点，直线 A_1B_2 与直线 B_1F 相交于点 T ，线段 OT 与椭圆的交点 M 恰为线段 OT 的中点，则该椭圆的离心率为_____.

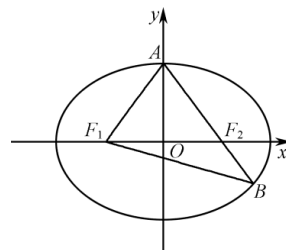


10. 如图，椭圆的中心在坐标原点 O ，顶点分别为 A_1, A_2, B_1, B_2 ，焦点分别为 F_1, F_2 ，延长 B_1F_2 与 A_2B_2 交于点 P ，若 $\angle B_1PA_2$ 为钝角，则此椭圆离心率的取值范围是_____.

11. 如图，已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ ， F_1, F_2 分别为椭圆的左、右焦点， A 为椭圆的上顶点，直线 AF_2 交椭圆于另一点 B 。

(1) 若 $\angle F_1AB = 90^\circ$ ，求椭圆的离心率；

(2) 若椭圆的焦距为 2，且 $\vec{AF_2} = 2\vec{F_2B}$ ，求椭圆的方程。



12. 已知 P 为椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上的点， F_1, F_2 分别是椭圆 C 的左右焦点， O 为坐标原点。

(1) 若 P 为椭圆的上顶点，且 $PF_1 \perp PF_2$ ， ΔF_1PF_2 的面积等于 4，求椭圆的标准方程；

(2) 若 ΔPOF_2 为等边三角形，求椭圆 C 的离心率。

