2019 年普通高等学校招生全国统一考试

数学（江苏卷）

注意事项:

考生在答题前请认真阅读本注意事项及各题答题要求.

1. 本试卷共 4 页，均为非选择题（第 1 题 ～ 第 20 题，共 20 题）. 本卷满分为 160 分，考试试卷为 120 分钟. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回;
2. 答题前，请务必将自己的姓名，准考证号用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔填写在试卷及答题卡的规定位置;
3. 请认真核对监考员在答题卡上所粘贴的条形码上的姓名、准考证号与本人是否相符;
4. 作答试题，必须用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔在答题卡上的指定位置作答，在其他位置作答一律无效;
5. 如需作图，须用 2B 铅笔绘、写清楚，线条、符号等须加黑、加粗.

参考公式:

样本数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的方差 $s^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$，其中 $\overline{x}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$.

柱体的体积 $V=Sh$，其中 S 是柱体的底面积，h 是柱体的高.

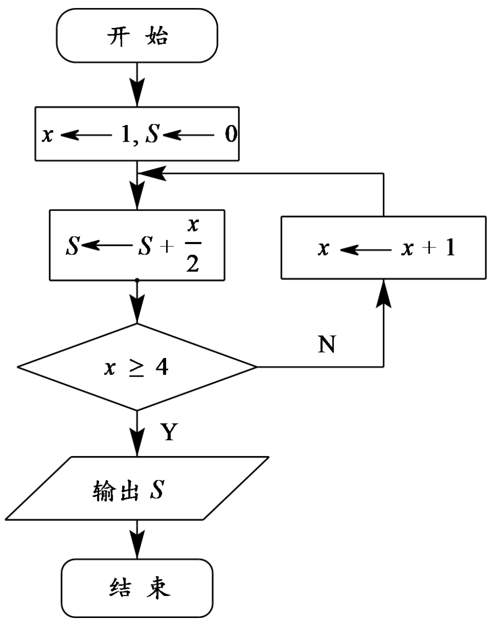
锥体的体积 $V=\dfrac{1}{3}Sh$，其中 S 是锥体的底面积，h 是锥体的高.

一、填空题：本题共 14 小题，每小题 5 分，共 70 分，请把答案填写在答题卡相应位置上.

1. 已知集合 $A=\{-1,0,1,6\}$，$B=\{x\mid x>0,\ x\in\mathbf{R}\}$，则 $A\cap B=$__________.

2. 已知复数 $(a+2i)(1+i)$ 的实部为 0，其中 i 为虚数单位，则实数 a 的值是__________.

3. 右图是一个算法流程图，则输出的 S 的值是__________.



（第 3 题）

4. 函数 $y=\sqrt{7+6x-x^2}$ 的定义域是__________.

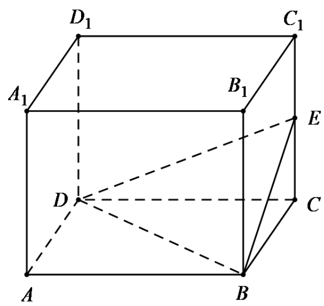
5. 已知一组数据 $6,7,8,8,9,10$，则该组数据的方差是__________.

6. 从 3 名男同学和 2 名女同学中任选 2 名同学参加志愿者服务，则选出的 2 名同学中至少有 1 名女同学的概率是 __________.

7. 在平面直角坐标系 xOy 中，若双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (b>0)$ 经过点 $(3,4)$，则该双曲线的渐近线方程是__________.

8. 已知数列 $\{a_n\}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 是等差数列，S_n 是其前 n 项和. 若 $a_2a_5+a_8=0$，$S_9=27$，则 S_8 的值是__________.

9. 如图，长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积是 120，E 为 CC_1 的中点，则三棱锥 $E-BCD$ 的体积是__________.

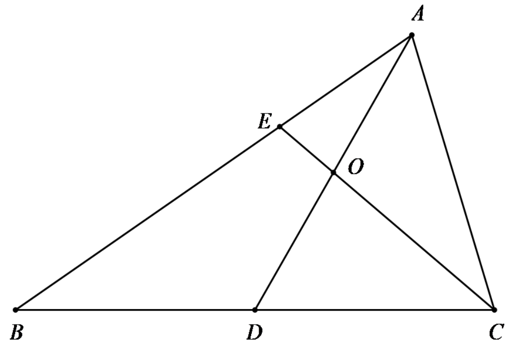


（第 9 题）

10. 在平面直角坐标系 xOy 中，P 是曲线 $y=x+\dfrac{4}{x}\ (x>0)$ 上的一个动点，则点 P 到直线 $x+y=0$ 的距离的最小值是__________.

11. 在平面直角坐标系 xOy 中，点 A 在曲线 $y=\ln x$ 上，且该曲线在点 A 处的切线经过点 $(-e,-1)$（e 为自然对数的底数），则点 A 的坐标是__________.

12. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，D 是 BC 的中点，E 在边 AB 上，$BE=2EA$，AD 与 CE 交于点 O. 若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=6\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{EC}$，则 $\dfrac{AB}{AC}$ 的值是____________.



（第 12 题）

13. 已知 $\dfrac{\tan\alpha}{\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})}=-\dfrac{2}{3}$，则 $\sin(2\alpha+\dfrac{\pi}{4})$ 的值是____________.

14. 设 $f(x)$，$g(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的两个周期函数，$f(x)$ 的周期为 4，$g(x)$ 的周期为 2，且 $f(x)$ 是奇函数. 当 $x\in(0,2]$ 时，$f(x)=\sqrt{1-(x-1)^2}$，$g(x)=\begin{cases}k(x+2) & ,0<x\le 1\\ -\dfrac{1}{2} & ,1<x\le 2\end{cases}$，其中 $k>0$. 若在区间 $(0,9]$ 上，关于 x 的方程 $f(x)=g(x)$ 有 8 个不同的实数根，则 k 的取值范围是____________.

二、解答题：本题共 6 小题，共 90 分，请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. （本小题满分 14 分）

在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c.

（1）若 $a=3c$, $b=\sqrt{2}$, $\cos B=\dfrac{2}{3}$，求 c 的值;

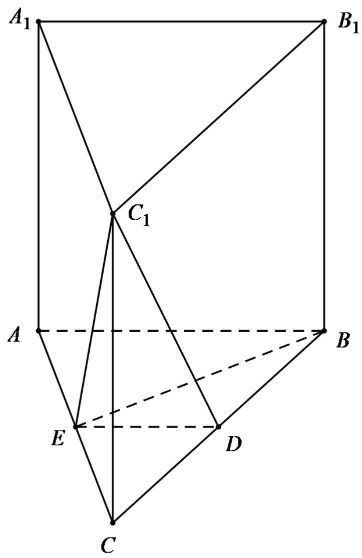
（2）若 $\dfrac{\sin A}{a}=\dfrac{\cos B}{2b}$，求 $\sin(B+\dfrac{\pi}{2})$ 的值.

16. （本小题满分 14 分）

如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，D,E 分别为 BC,AC 的中点，$AB=BC$. 求证

（1）$A_1B_1 \parallel$ 平面 DEC_1;

（2）$BE \perp C_1E$.

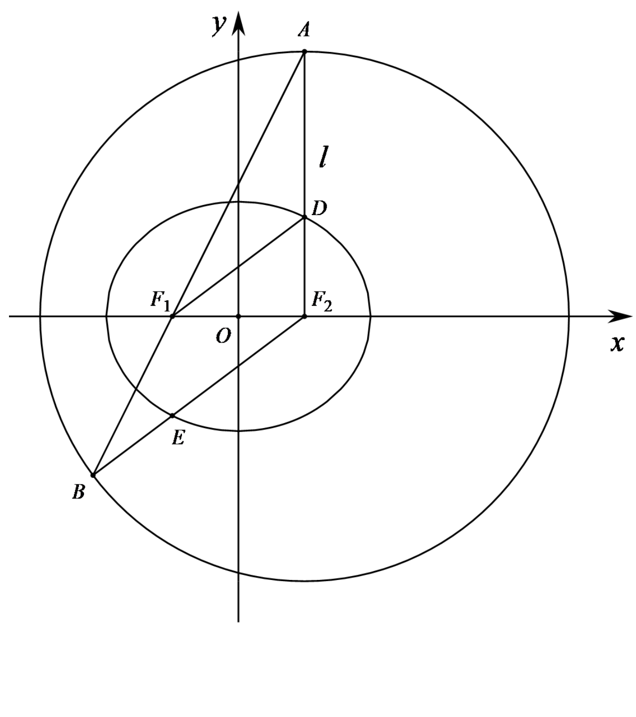


17. （本小题满分 14 分）

如图，在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的焦点为 $F_1(-1,0)$, $F_2(1,0)$. 过 F_2 作 x 轴的垂线 l，在 x 轴的上方，l 与圆 $F_2:(x-1)^2+y^2=4a^2$ 交于点 A，与椭圆 C 交于点 D. 连结 AF_1 并延长交圆 F_2 于点 B，连结 BF_2 交椭圆 C 于点 E，连结 DF_1. 已知 $DF_1=\dfrac{5}{2}$.

（1）求椭圆 C 的标准方程;

（2）求点 E 的坐标.



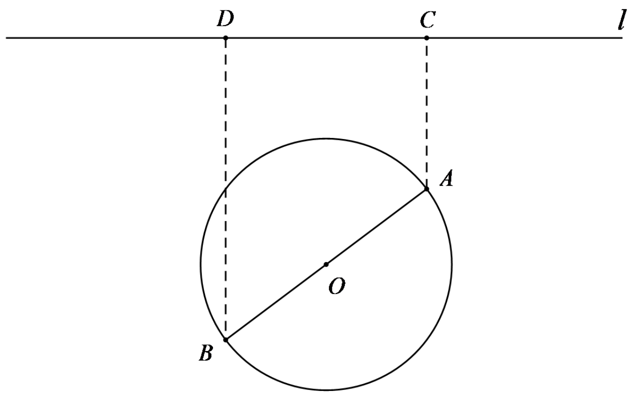
18.（本小题满分 16 分）

如图，一个湖的边界是圆心为 O 的圆，湖的一侧有一条直线型的公路 l，湖上有桥 AB（AB 是圆 O 的直径），规划在公路 l 上选两个点 P、Q，并修建两段直线型道路 PB、QA. 规划要求：线段 PB、QA 上的所有点到点 O 的距离均不小于圆 O 的半径. 已知点 A,B 到直线 l 的距离分别为 AC 和 BD（C、D 为垂足），测得 $AB=10,\ AC=6,\ BD=12$（单位：百米）.

（1）若道路 PB 与桥 AB 垂直，求道路 PB 的长;

（2）在规划要求下，P 和 Q 中能否有一个点选在 D 处？并说明理由;

（3）在规划要求下，若道路 PB 和 QA 的长度均为 d（单位：百米），求当 d 最小值时，P、Q 两点间的距离.



19.（本小题满分 16 分）

已知函数 $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$，$f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.

（1）若 $a=b=c$，$f(4)=8$，求实数 a 的值;

（2）若 $a\neq b,\ b=c$，函数 $f(x)$，$f'(x)$ 的零点均在集合 $\{-3,1,3\}$ 中，求 $f(x)$ 的极小值;

（3）当 $a=0,\ 0<b\leq 1,\ c=1$ 时，记 $f(x)$ 的极大值为 M，证明：$M\leq \dfrac{4}{27}$.

20.（本小题满分 16 分）

定义首项为 1 且公比为正数的等比数列为“$M-$ 数列”.

（1）已知等比数列 $\{a_n\}$ $(n\in \mathbf{N}^*)$ 满足：$a_2a_4=a_5$，$a_3-4a_2+4a_1=0$，求证：数列 $\{a_n\}$ 为“$M-$ 数列”;

（2）已知数列 $\{b_n\}$ $(n\in \mathbf{N}^*)$ 满足：$b_1=1$，$\dfrac{1}{S_n}=\dfrac{2}{b_n}-\dfrac{2}{b_{n+1}}$，其中 S_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

① 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

② 设 m 为正整数，若存在“$M-$ 数列”$\{c_n\}$ $(n\in \mathbf{N}^*)$，对任意正整数 k，当 $k\leq m$ 时，都有 $c_k\leq b_k\leq c_{k+1}$ 成立，求 m 的最大值.

附加题

21. **【选做题】本题包括** A、B、C **三小题，请选定其中两小题，并在相应的答题区域内作答. 若多做，则按作答的前两小题评分. 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.**

A.**【选修 $4-2$：矩阵与变换】**（本小题满分 10 分）

已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix}$.

（1）求 A^2;（2）求矩阵 A 的特征值.

B.**【选修 $4-4$：坐标系与参数方程】**（本小题满分 10 分）

在极坐标系中，已知两点 $A(3,\dfrac{\pi}{4}),B(\sqrt{2},\dfrac{\pi}{2})$，直线 l 的方程为 $\rho\sin(\theta+\dfrac{\pi}{4})=3$.

（1）求 A,B 两点间的距离;（2）求点 B 到直线 l 的距离.

C.**【选修 $4-5$：不等式选讲】**（本小题满分 10 分）

设 $x\in\mathbf{R}$，解不等式 $|x|+|2x-1|>2$.

【必做题】第 22 题、第 23 题，每题 10 分，共计 20 分. 请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

22. （本小题满分 10 分）

设 $(1+x)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n, n\geqslant 4, n\in\mathbf{N}^*$. 已知 $a_3^2=2a_2a_4$.

（1）求 n 的值;（2）设 $(1+\sqrt{3})^n=a+b\sqrt{3}$，其中 $a,b\in\mathbf{N}^*$，求 a^2-3b^2 的值.

23. （本小题满分 10 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，设点集 $A_n=\{(0,0),(1,0),(2,0),\cdots,(n,0)\}$，$B_n=\{(0,1),(n,1)\}$，$C_n=\{(0,2),(1,2),(2,2),\cdots,(n,2)\}, n\in\mathbf{N}^*$. 令 $M_n=A_n\cup B_n\cup C_n$，从集合 M_n 中任取两个不同的点，用随机变量 X 表示它们之间的距离.

（1）当 $n=1$ 时，求 X 的概率分布;

（2）对给定的正整数 $n\ (n\geq 3)$，求概率 $P(X\leq n)$（用 n 表示）.

2019 年普通高等学校招生全国统一考试参考答案

数学（江苏卷）

注意事项:

考生在答题前请认真阅读本注意事项及各题答题要求.

1. 本试卷共 4 页，均为非选择题（第 1 题 ~ 第 20 题，共 20 题）. 本卷满分为 160 分，考试试卷为 120 分钟. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回;
2. 答题前，请务必将自己的姓名，准考证号用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔填写在试卷及答题卡的规定位置;
3. 请认真核对监考员在答题卡上所粘贴的条形码上的姓名、准考证号与本人是否相符;
4. 作答试题，必须用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔在答题卡上的指定位置作答，在其他位置作答一律无效;
5. 如需作图，须用 2B 铅笔绘、写清楚，线条、符号等须加黑、加粗.

参考公式:

样本数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的方差 $s^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$，其中 $\overline{x}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$.

柱体的体积 $V=Sh$，其中 S 是柱体的底面积，h 是柱体的高.

锥体的体积 $V=\dfrac{1}{3}Sh$，其中 S 是锥体的底面积，h 是锥体的高.

一、填空题：本题共 14 **小题，每小题** 5 **分，共** 70 **分，请把答案填写在答题卡相应位置上.**

1. 已知集合 $A=\{-1,0,1,6\}$, $B=\{x\mid x>0,\ x\in\mathbf{R}\}$，则 $A\cap B=$__________.

答案 $\{1,6\}$.

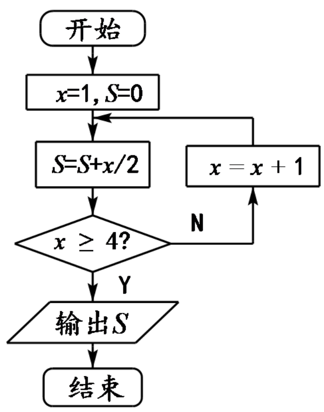
解析 因为在 A 中大于 0 的元素有 $1,6$，所以 $A\cap B=\{1,6\}$.

2. 已知复数 $(a+2i)(1+i)$ 的实部为 0，其中 i 为虚数单位，则实数 a 的值是__________.

答案 2.

解析 因为 $(a+2i)(1+i)=(a-2)+(a+2)i$ 的实部为 0，所以 $a=2$.

3. 右图是一个算法流程图，则输出的 S 的值是__________.



答案 5.

解析 .

x	1	2	3	4
S	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{3}{2}$	3	5
$x\ge 4$	N	N	N	Y

所以输出的 S 的值为 5.

4. 函数 $y=\sqrt{7+6x-x^2}$ 的定义域是__________.

答案 $[-1,7]$.

解析 由 $7+6x-x^2\ge 0$，解得 $-1\le x\le 7$，故定义域为 $[-1,7]$.

5. 已知一组数据 $6,7,8,8,9,10$，则该组数据的方差是__________.

答案 $\dfrac{5}{3}$.

解析　因为

$$\overline{x}=\frac{1}{6}(6+7+8+8+9+10)=8,$$

所以

$$s^2=\frac{1}{6}[(6-8)^2+(7-8)^2+(8-8)^2+(8-8)^2+(9-8)^2+(10-8)^2]=\frac{5}{3}.$$

6. 从 3 名男同学和 2 名女同学中任选 2 名同学参加志愿者服务，则选出的 2 名同学中至少有 1 名女同学的概率是____________.

答案　$\frac{7}{10}$.

解析　从 5 名同学中任选 2 名，有 10 种结果，不含女同学的情况有 3 种，所求概率为 $1-\frac{3}{10}=\frac{7}{10}$.

7. 在平面直角坐标系 xOy 中，若双曲线 $x^2-\frac{y^2}{b^2}=1\ (b>0)$ 经过点 $(3,4)$，则该双曲线的渐近线方程是____________.

答案　$y=\pm\sqrt{2}x$.

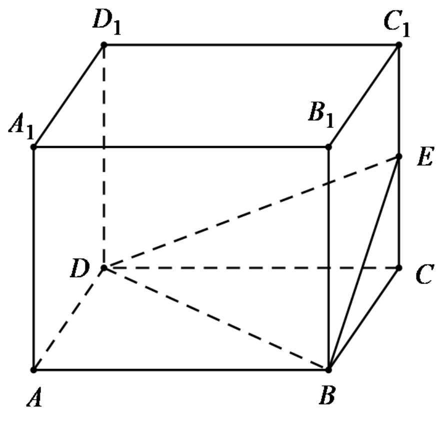
解析　由已知，得 $9-\frac{16}{b^2}=1$，$b>0$，所以 $b=\sqrt{2}$；又 $a=1$，所以渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{2}x$.

8. 已知数列 $\{a_n\}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 是等差数列，S_n 是其前 n 项和. 若 $a_2a_5+a_8=0$，$S_9=27$，则 S_8 的值是____________.

答案　16.

解析　由 $S_9=9a_5=27$，得 $a_5=3$，从而 $3a_2+a_8=0$，即 $3(a_5-3d)+(a_5+3d)=0$，解得 $d=\frac{2}{3}a_5=2$. 所以 $S_8=S_9-a_9=S_9-(a_5+4d)=27-11=16$.

9. 如图，长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积是 120，E 为 CC_1 的中点，则三棱锥 $E-BCD$ 的体积是____________.



答案　10.

解析　因为

$$\frac{V_{E-BCD}}{V_{长方体}}=\frac{\frac{1}{3}S_{\triangle BCD}\cdot EC}{S_{矩形ABC}\cdot C_1C}=\frac{1}{3}\cdot\frac{S_{\triangle BCD}}{S_{矩形ABCD}}\cdot\frac{EC}{C_1C}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{12},$$

所以

$$V_{E-BCD}=\frac{1}{12}V_{长方体}=\frac{1}{12}\times 120=10.$$

10. 在平面直角坐标系 xOy 中，P 是曲线 $y=x+\dfrac{4}{x}\ (x>0)$ 上的一个动点，则点 P 到直线 $x+y=0$ 的距离的最小值是____________.

答案　4.

解析　由已知，可设 $P(x,x+\dfrac{4}{x})$，$x>0$，所以

$$d=\frac{\left|x+x+\frac{4}{x}\right|}{\sqrt{2}}=\frac{2x+\frac{4}{x}}{\sqrt{2}}\geqslant\frac{2\sqrt{2x\cdot\frac{4}{x}}}{\sqrt{2}}=4,$$

当且仅当 $2x=\dfrac{4}{x}$，即 $x=\sqrt{2}$ 时取等，故点 P 到直线 $x+y=0$ 的距离的最小值为 4.

11. 在平面直角坐标系 xOy 中，点 A 在曲线 $y=\ln x$ 上，且该曲线在点 A 处的切线经过点 $(-e,-1)$（e 为自然对数的底数），则点 A 的坐标是____________.

答案　$(e,1)$.

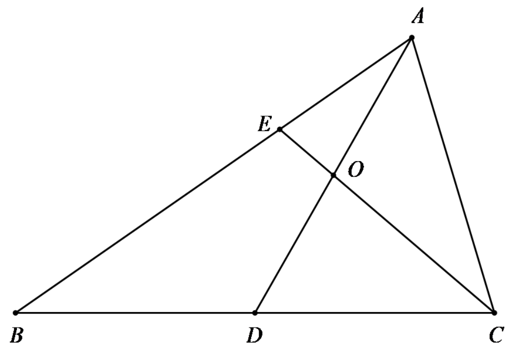
解析　设切点 $A(x_0,\ln x_0)$.

因为 $y'=(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$，所以切线的斜率 $k=\dfrac{1}{x_0}$.

又切线过点 $(-e,-1)$，所以 $k=\dfrac{\ln x_0+1}{x_0+e}=\dfrac{1}{x_0}$，即 $x_0\ln x_0=e$，解得 $x_0=e$（可先猜，再证）.

所以点 A 的坐标为 $(e,1)$.

12. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，D 是 BC 的中点，E 在边 AB 上，$BE=2EA$，AD 与 CE 交于点 O. 若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=6\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{EC}$，则 $\dfrac{AB}{AC}$ 的值是____________.



（第 12 题）

答案　$\sqrt{3}$.

解法一　$\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AE}=-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

设 $\overrightarrow{AO}=2\lambda\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC},\Rightarrow\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AE}\Rightarrow\overrightarrow{AO}=3\lambda\overrightarrow{AE}+\lambda\overrightarrow{AC}$.

$$\begin{aligned}&\text{又 } E,O,C \text{ 三点共线}\Rightarrow 3\lambda+\lambda=1\Rightarrow\lambda=\frac{1}{4}\\&\Rightarrow\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\\&\Rightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-6\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot(-\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2-\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}^2=0,\end{aligned}$$

故 $\overrightarrow{AB}^2=3\overrightarrow{AC}^2\Rightarrow$ 所求 $=\sqrt{3}$.

解法二　不妨设 $AB\perp CE$，以 E 为原点，EC,EA 为 x,y 轴正方向建系.

设 $C(2,0),A(0,a),B(0,-2a)$，则 $D(1,-a)\Rightarrow\begin{cases}AD:y=-2ax+a\\CE:y=0\end{cases}\Rightarrow O\left(\frac{1}{2},0\right)$.

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-6\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{EC}=3a^2-6=0\Rightarrow a^2=2\Rightarrow\frac{AB}{AC}=\sqrt{\frac{9a^2}{a^2+4}}=\sqrt{3}.$$

解法三 极化恒等 + 中线定理:

同解法一知: $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$; 同理可得: $\overrightarrow{OC}=\frac{3}{4}\overrightarrow{EC}$，取 CD 中点 F，

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AD^2-CD^2,\quad 6\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{EC}=8\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OC}=8OF^2-8CF^2=2AC^2-2CD^2$$

因为 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=6\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{EC}$，所以 $AD^2+CD^2=2AC^2$.

由中线定理: $AB^2+AC^2=2\left(AD^2+CD^2\right)=4AC^2\Rightarrow$ 所求 $=\sqrt{3}$.

13. 已知 $\dfrac{\tan\alpha}{\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})}=-\dfrac{2}{3}$，则 $\sin(2\alpha+\dfrac{\pi}{4})$ 的值是__________.

答案 $\dfrac{\sqrt{2}}{10}$.

解法一 $\dfrac{\tan\alpha}{\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}=\dfrac{\tan\alpha(1-\tan\alpha)}{1+\tan\alpha}=-\dfrac{2}{3}\Rightarrow\tan\alpha=2$ 或 $-\dfrac{1}{3}$.

所求 $=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sin 2\alpha+\cos 2\alpha)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{2\tan\alpha+1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\dfrac{\sqrt{2}}{10}$.

解法二 令

$$\begin{cases}\alpha=x\\ \alpha+\frac{\pi}{4}=y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3\tan x=-2\tan y\\ \sin(y-x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3\sin x\cos y=-2\sin y\cos x\\ \sin y\cos x-\cos y\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sin x\cos y=-\frac{\sqrt{2}}{5}\\ \cos x\sin y=\frac{3\sqrt{2}}{10}\end{cases}.$$

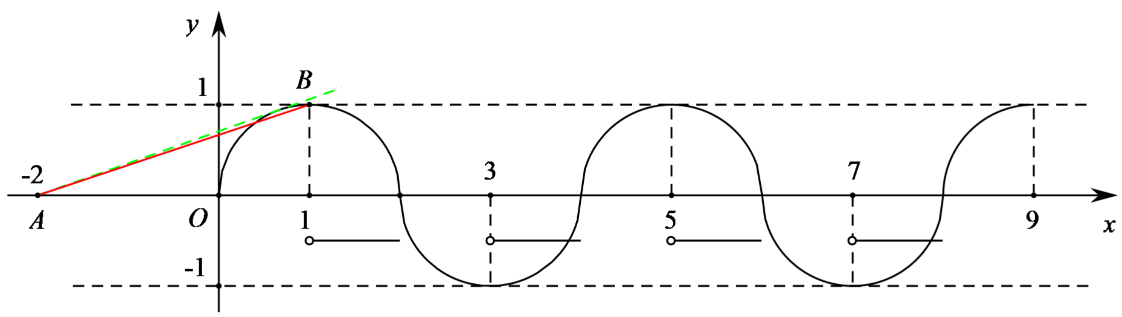
所求 $=\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y=\dfrac{\sqrt{2}}{10}$.

14. 设 $f(x)$, $g(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的两个周期函数，$f(x)$ 的周期为 4，$g(x)$ 的周期为 2，且 $f(x)$ 是奇函数. 当 $x\in(0,2]$ 时，$f(x)=\sqrt{1-(x-1)^2}$，$g(x)=\begin{cases}k(x+2) & ,0<x\le 1\\ -\frac{1}{2} & ,1<x\le 2\end{cases}$，其中 $k>0$. 若在区间 $(0,9]$ 上，关于 x 的方程 $f(x)=g(x)$ 有 8 个不同的实数根，则 k 的取值范围是__________.

答案 $[\dfrac{1}{3},\dfrac{\sqrt{2}}{4})$.

解析 当 $x\in(0,2]$ 时，$y=f(x)=\sqrt{1-(x-1)^2}$ 等价于 $(x-1)^2+y^2=1\ (y\ge 0)$.

结合 $f(x)$ 是周期为 4 的奇函数，可作出 $f(x)$ 在 $(0,9]$ 上的图象:



因为当 $x\in(1,2]$ 时，$g(x)=-\dfrac{1}{2}$，且 $g(x)$ 的周期为 2.

由图可知：当 $x\in(1,2]\cup(3,4]\cup(5,6]\cup(7,8]$ 时，$f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象有 2 个交点.

由已知，$f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象在区间 $(0,9]$ 上有 8 个交点.

所以当 $x\in(0,1]\cup(2,3]\cup(4,5]\cup(6,7]\cup(8,9]$ 时，$f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象有 6 个交点.

又当 $x\in(0,1]$ 时，$y=g(x)=k(x+2)$ 表示的直线恒过定点 $A(-2,0)$，且斜率 $k>0$，结合 $g(x)$ 的周期为 2 及 $f(x)$ 的图象，可知：当 $x\in(2,3]\cup(6,7]$ 时，$f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象无交点，所以当 $x\in(0,1]\cup(4,5]\cup(8,9]$ 时，$f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象有 6 个交点.

由 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的周期性可知：当 $x\in(0,1]$ 时，$f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象有 2 个交点.

如图，当线段 $y=k(x+2)\ (0<x\le 1)$ 与圆弧 $(x-1)^2+y^2=1\ (0<x\le 1,y\ge 0)$，相切时，

$$d=\frac{|3k|}{\sqrt{k^2+1}}=1\Rightarrow k^2=\frac{1}{8}.$$

又 $k>0$，所以 $k=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$（此时恰有 1 个交点）;

当线段 $y=k(x+2)\ (0<x\le 1)$ 过点 $B(1,1)$ 时，$k=k_{AB}=\dfrac{1}{3}$（此时恰有 2 个交点）.

结合图形分析可知：k 的取值范围是 $[\dfrac{1}{3},\dfrac{\sqrt{2}}{4})$.

二、解答题：本题共 6 小题，共 90 分，请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. （本小题满分 14 分）

在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c.

（1）若 $a=3c,\ b=\sqrt{2},\ \cos B=\dfrac{2}{3}$，求 c 的值;

（2）若 $\dfrac{\sin A}{a}=\dfrac{\cos B}{2b}$，求 $\sin(B+\dfrac{\pi}{2})$ 的值.

解　（1）因为 $a=3c,\ b=\sqrt{2},\ \cos B=\dfrac{2}{3}$.

由余弦定理 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，得 $\dfrac{2}{3}=\dfrac{(3c)^2+c^2-(\sqrt{2})^2}{2\times 3c\times c}$，即 $c^2=\dfrac{1}{3}$.

所以 $c=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

（2）因为 $\dfrac{\sin A}{a}=\dfrac{\cos B}{2b}$，由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，得 $\dfrac{\cos B}{2b}=\dfrac{\sin B}{b}$，所以 $\cos B=2\sin B$.

从而 $\cos^2 B=(2\sin B)^2$，即 $\cos^2 B=4(1-\cos^2 B)$，故 $\cos^2 B=\dfrac{4}{5}$.

因为 $\sin B>0$，所以 $\cos B=2\sin B>0$，从而 $\cos B=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

因此 $\sin\left(B+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos B=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

16. （本小题满分 14 分）

如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，D,E 分别为 BC,AC 的中点，$AB=BC$. 求证

（1）$A_1B_1\parallel$ 平面 DEC_1;

（2）$BE\perp C_1E$.

证明　（1）因为 D,E 分别为 BC,AC 的中点，所以 $ED\parallel AB$.

在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB\parallel A_1B_1$，所以 $A_1B_1\parallel ED$.

又因为 $ED\subset$ 平面 DEC_1，$A_1B_1\not\subset$ 平面 DEC_1，所以 $A_1B_1\parallel$ 平面 DEC_1.

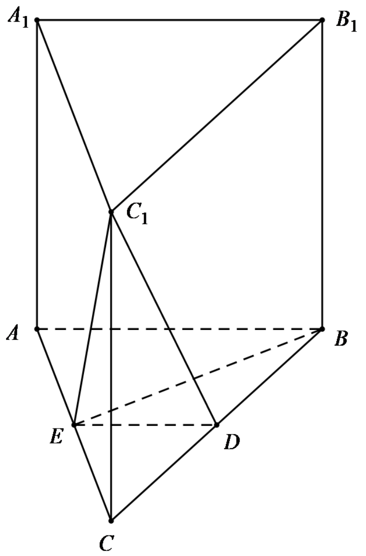
（2）因为 $AB=BC$，E 为 AC 的中点，所以 $BE\perp AC$.

因为三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 是直棱柱，所以 $C_1C\perp$ 平面 ABC.

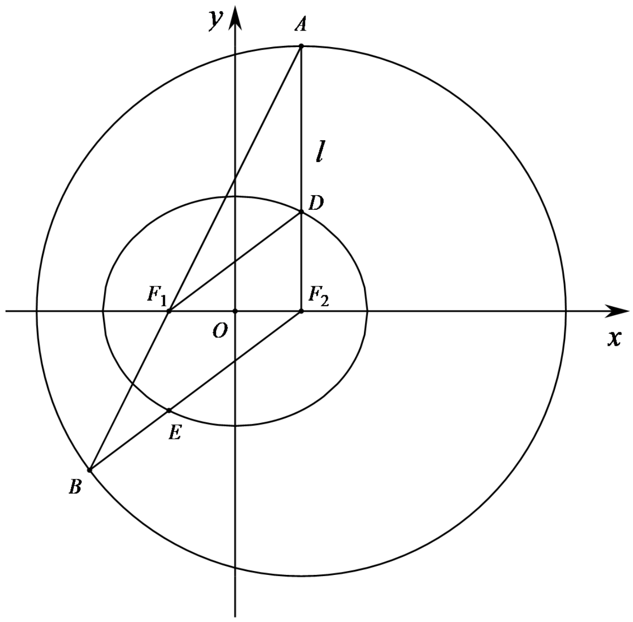
又因为 $BE\subset$ 平面 ABC，所以 $C_1C\perp BE$.

因为 $C_1C\subset$ 平面 A_1ACC_1，$AC\subset$ 平面 A_1ACC_1，$C_1C\cap AC=C$，所以 $BE\perp$ 平面 A_1ACC_1.

因为 $C_1E\subset$ 平面 A_1ACC_1，所以 $BE\perp C_1E$.



题 16 图



题 17 图

17.（本小题满分 14 分）

如图，在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的焦点为 $F_1(-1,0)$, $F_2(1,0)$. 过 F_2 作 x 轴的垂线 l，在 x 轴的上方，l 与圆 $F_2:(x-1)^2+y^2=4a^2$ 交于点 A，与椭圆 C 交于点 D. 连结 AF_1 并延长交圆 F_2 于点 B，连结 BF_2 交椭圆 C 于点 E，连结 DF_1. 已知 $DF_1=\dfrac{5}{2}$.

（1）求椭圆 C 的标准方程;

（2）求点 E 的坐标.

解　（1）设椭圆 C 的焦距为 $2c$.

因为 $F_1(-1,0)$, $F_2(1,0)$，所以 $F_1F_2=2$, $c=1$.

又因为 $DF_1=\dfrac{5}{2}$，$AF_2\perp x$ 轴，所以 $DF_2=\sqrt{DF_1^2-F_1F_2^2}=\sqrt{\left(\dfrac{5}{2}\right)^2-2^2}=\dfrac{3}{2}$.

因此 $2a=DF_1+DF_2=4$，从而 $a=2$; 由 $b^2=a^2-c^2$，得 $b^2=3$.

因此，椭圆 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

（2）**解法一**　由（1）知，椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$, $a=2$.

因为 $AF_2\perp x$ 轴，所以点 A 的横坐标为 1. 将 $x=1$ 代入圆 F_2 的方程 $(x-1)^2+y^2=16$，解得 $y=\pm4$.

因为点 A 在 x 轴上方，所以 $A(1,4)$; 又 $F_1(-1,0)$，所以直线 $AF_1:y=2x+2$.

由 $\begin{cases}y=2x+2\\(x-1)^2+y^2=16\end{cases}$，得 $5x^2+6x-11=0$，解得 $x=1$ 或 $x=-\dfrac{11}{5}$.

将 $x=-\dfrac{11}{5}$ 代入 $y=2x+2$，得 $y=-\dfrac{12}{5}$，因此 $B(-\dfrac{11}{5},-\dfrac{12}{5})$.

又 $F_2(1,0)$，所以直线 $BF_2: y=\frac{3}{4}(x-1)$.

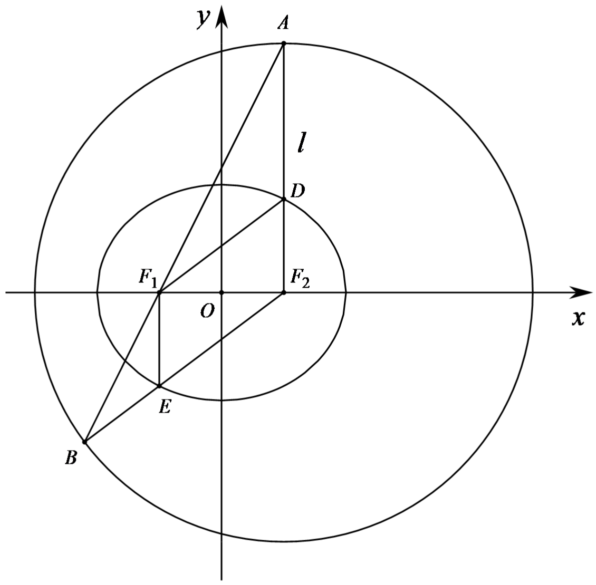
由 $\begin{cases} y=\frac{3}{4}(x-1) \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \end{cases}$，得 $7x^2-6x-13=0$，解得 $x=-1$ 或 $x=\frac{13}{7}$.

又因为 E 是线段 BF_2 与椭圆的交点，所以 $x=-1$，将 $x=-1$ 代入 $y=\frac{3}{4}(x-1)$，得 $y=-\frac{3}{2}$.

因此 $E(-1,-\frac{3}{2})$.

解法二 由（1）知，椭圆 $C: \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

如图，连结 EF_1.



因为 $BF_2=2a$, $EF_1+EF_2=2a$，所以 $EF_1=EB$，从而 $\angle BF_1E=\angle B$.

因为 $F_2A=F_2B$，所以 $\angle A=\angle B$，所以 $\angle A=\angle BF_1E$，从而 $EF_1 \parallel F_2A$.

因为 $AF_2 \perp x$ 轴，所以 $EF_1 \perp x$ 轴；因为 $F_1(-1,0)$，由 $\begin{cases} x=-1 \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \end{cases}$，得 $y=\pm\frac{3}{2}$.

又因为 E 是线段 BF_2 与椭圆的交点，所以 $y=-\frac{3}{2}$.

因此 $E(-1,-\frac{3}{2})$.

18.（本小题满分 16 分）

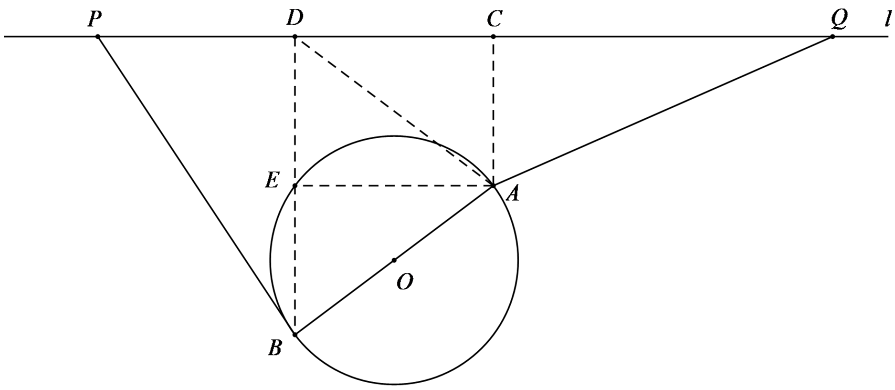
如图，一个湖的边界是圆心为 O 的圆，湖的一侧有一条直线型的公路 l，湖上有桥 AB（AB 是圆 O 的直径），规划在公路 l 上选两个点 P、Q，并修建两段直线型道路 PB、QA. 规划要求：线段 PB、QA 上的所有点到点 O 的距离均不小于圆 O 的半径. 已知点 A,B 到直线 l 的距离分别为 AC 和 BD（C、D 为垂足），测得 $AB=10$, $AC=6$, $BD=12$（单位：百米）.

（1）若道路 PB 与桥 AB 垂直，求道路 PB 的长;

（2）在规划要求下，P 和 Q 中能否有一个点选在 D 处？并说明理由;

（3）在规划要求下，若道路 PB 和 QA 的长度均为 d（单位：百米），求当 d 最小值时，P、Q 两点间的距离.

解法一 （1）过 A 作 $AE \perp BD$，垂足为 E.



由已知条件得，四边形 $ACDE$ 为矩形，$DE=BE=AC=6$，$AE=CD=8$.

因为 $PB\perp AB$，所以 $\cos\angle PBD=\sin\angle ABE=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$，所以 $PB=\frac{BD}{\cos\angle PBD}=\frac{12}{\frac{4}{5}}=15$.

因此道路 PB 的长为 15（百米）

（2）① 若 P 在 D 处，由（1）可得 E 在圆上，则线段 BE 上的点（除 B,E）到点 O 的距离均小于圆 O 的半径，所以 P 选在 D 处不满足规划要求;

② 若 Q 在 D 处，连结 AD，由（1）知 $AD=\sqrt{AE^2+ED^2}=10$，从而

$$\cos\angle BAD=\frac{AD^2+AB^2-BD^2}{2AD\cdot AB}=\frac{7}{25}>0,$$

所以 $\angle BAD$ 为锐角.

所以线段 AD 上存在点到点 O 的距离小于圆 O 的半径，因此 Q 选在 D 处也不满足规划要求.

综上，P 和 Q 均不能选在 D 处.

（3）先讨论点 P 的位置.

当 $\angle OBP<90^\circ$ 时，线段 PB 上存在点到点 O 的距离小于圆 O 的半径，点 P 不符合规划要求;

当 $\angle OBP\geq 90^\circ$ 时，对线段 PB 上任意一点 F，$OF\geq OB$，即线段 PB 上所有点到点 O 的距离均不小于圆 O 的半径，点 P 符合规划要求.

设 P_1 为 l 上一点，且 $P_1B\perp AB$.

由（1）知，$P_1B=15$，此时 $P_1D=P_1B\sin P_1BD=P_1B\cos\angle EBA=15\times\frac{3}{5}=9$;

当 $\angle OBP>90^\circ$ 时，在 $\triangle PP_1B$ 中，$PB>P_1B=15$.

由上可知，$d\geq 15$.

再讨论点 Q 的位置.

由（2）知，要使得 $QA\geq 15$，点 Q 只有位于点 C 的右侧，才能符合规划要求.

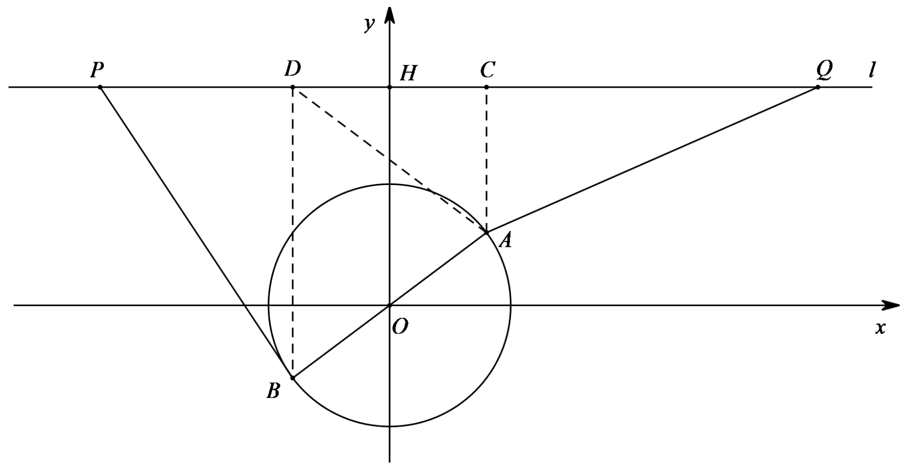
当 $QA=15$ 时，$CQ=\sqrt{QA^2-AC^2}=\sqrt{15^2-6^2}=3\sqrt{21}$，此时，线段 QA 上所有点到 O 的距离均不小于圆 O 的半径.

综上，当 $PB\perp AB$，点 Q 位于点 C 右侧，且 $CQ=3\sqrt{21}$ 时，d 最小，此时 P,Q 两点间的距离

$$PQ=PD+CD+CQ=17+3\sqrt{21}.$$

因此，d 最小时，P,Q 两点间的距离为 $17+3\sqrt{21}$（百米）.

解法二　（1）如图，过 O 作 $OH\perp l$，垂足为 H.



以 O 为坐标原点，直线 OH 为 y 轴，建立平面直角坐标系.

因为 $BD=12,\ AC=6$，所以 $OH=9$，直线 l 的方程为 $y=9$，点 A,B 的纵坐标分别为 $3,-3$.

因为 AB 为圆 O 的直径，$AB=10$，所以圆 O 的方程为 $x^2+y^2=25$.

从而 $A(4,3),B(-4,-3)$，直线 AB 的斜率为 $\dfrac{3}{4}$.

因为 $PB\perp AB$，所以直线 PB 的斜率为 $-\dfrac{4}{3}$，直线 PB 的方程为 $y=-\dfrac{4}{3}x-\dfrac{25}{3}$.

所以 $P(-13,9)$，$PB=\sqrt{(-13+4)^2+(9+3)^2}=15$.

因此道路 PB 的长为 15（百米）.

（2）① 若 P 在 D 处，取线段 BD 上一点 $E(-4,0)$，则 $EO=4<5$，故 P 选在 D 处不满足规划要求;

② 若 Q 在 D 处，连结 AD，由（1）知 $D(-4,9)$.

又 $A(4,3)$，所以线段 $AD: y=-\dfrac{3}{4}x+6\ (-4\le x\le 4)$.

在线段 AD 上取点 $M(3,\dfrac{15}{4})$，因为 $OM=\sqrt{3^2+\left(\dfrac{15}{4}\right)^2}<\sqrt{3^2+4^2}=5$.

所以线段 AD 上存在点到点 O 的距离小于圆 O 的半径，因此 Q 选在 D 处也不满足规划要求.

综上，P 和 Q 均不能选在 D 处.

（3）先讨论点 P 的位置.

当 $\angle OBP<90^\circ$ 时，线段 PB 上存在点到点 O 的距离小于圆 O 的半径，点 P 不符合规划要求;

当 $\angle OBP\ge 90^\circ$ 时，对线段 PB 上任意一点 F，$OF\ge OB$，即线段 PB 上所有点到点 O 的距离均不小于圆 O 的半径，点 P 符合规划要求.

设 P_1 为 l 上一点，且 $P_1B\perp AB$，由（1）知，$P_1B=15$，此时 $P_1(-13,9)$;

当 $\angle OBP>90^\circ$ 时，在 $\triangle PP_1B$ 中，$PB>P_1B=15$.

由上可知，$d\ge 15$.

再讨论点 Q 的位置.

由（2）知，要使得 $QA\ge 15$，点 Q 只有位于点 C 的右侧，才能符合规划要求.

当 $QA=15$ 时，设 $Q(a,9)$，由 $AQ=\sqrt{(a-4)^2+(9-3)^2}=15\ (a>4)$ 得 $a=4+3\sqrt{21}$，所以 $Q(4+3\sqrt{21},9)$，此时，线段 QA 上所有点到点 O 的距离均小于圆 O 的半径.

综上，当 $P(-13,9),Q(4+3\sqrt{21},9)$ 时，d 最小，P,Q 两点间距离 $PQ=4+3\sqrt{21}-(-13)=17+3\sqrt{21}$.

因此，d 最小时，P,Q 两点间的距离为 $17+3\sqrt{21}$（百米）.

19.（本小题满分 16 分）

已知函数 $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$，$f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.

（1）若 $a=b=c$，$f(4)=8$，求实数 a 的值;

（2）若 $a\neq b$, $b=c$，函数 $f(x)$, $f'(x)$ 的零点均在集合 $\{-3,1,3\}$ 中，求 $f(x)$ 的极小值;

（3）当 $a=0,\ 0<b\leq 1,\ c=1$ 时，记 $f(x)$ 的极大值为 M，证明: $M\leq\dfrac{4}{27}$.

解　（1）因为 $a=b=c$，所以 $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)=(x-a)^3$.

因为 $f(4)=8$，所以 $(4-a)^3=8$，解得 $a=2$.

（2）因为 $b=c$，所以 $f(x)=(x-a)(x-b)^2=x^3-(a+2b)x^2+b(2a+b)x-ab^2$，从而 $f'(x)=3(x-b)\left(x-\dfrac{2a+b}{3}\right)$.

令 $f'(x)=0$，得 $x=b$ 或 $x=\dfrac{2a+b}{3}$.

因为 $a,b,\dfrac{2a+b}{3}$ 都在集合 $\{-3,1,3\}$ 中，且 $a\neq b$，所以 $\dfrac{2a+b}{3}=1,a=3,b=-3$.

此时，$f(x)=(x-3)(x+3)^2$, $f'(x)=3(x+3)(x-1)$.

令 $f'(x)=0$，得 $x=-3$ 或 $x=1$.

列表如下:

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

所以 $f(x)$ 的极小值为 $f(1)=(1-3)(1+3)^2=-32$.

（3）因为 $a=0,\ c=1$，所以 $f(x)=x(x-b)(x-1)=x^3-(b+1)x^2+bx$, $f'(x)=3x^2-2(b+1)x+b$.

因为 $0<b\leq 1$，所以 $\Delta=4(b+1)^2-12b=(2b-1)^2+3>0$，则 $f'(x)$ 有 2 个不同的零点，设为 $x_1,x_2\ (x_1<x_2)$.

由 $f'(x)=0$，得 $x_1=\dfrac{b+1-\sqrt{b^2-b+1}}{3}$, $x_2=\dfrac{b+1+\sqrt{b^2-b+1}}{3}$.

列表如下:

x	$(-\infty,x_1)$	x_1	(x_1,x_2)	x_2	$(x_2,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

所以 $f(x)$ 的极大值 $M=f(x_1)$.

解法一

$$
\begin{aligned}
M&=f\left(x_1\right)=x_1^3-(b+1)x_1^2+bx_1\\
&=\left(3x_1^2-2(b+1)x_1+b\right)\left(\frac{x_1}{3}-\frac{b+1}{9}\right)-\frac{2\left(b^2-b+1\right)}{9}x_1+\frac{b(b+1)}{9}\\
&=\frac{-2\left(b^2-b+1\right)(b+1)}{27}+\frac{b(b+1)}{9}+\frac{2}{27}\left(\sqrt{b^2-b+1}\right)^3\\
&=\frac{b(b+1)}{27}-\frac{2(b-1)^2(b+1)}{27}+\frac{2}{27}(\sqrt{b(b-1)+1})^3\\
&\leq\frac{b(b+1)}{27}+\frac{2}{27}\leqslant\frac{4}{27}.
\end{aligned}
$$

因此 $M\leq\dfrac{4}{27}$.

解法二　因为 $0<b\le 1$，所以 $x_1\in(0,1)$.

当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)=x(x-b)(x-1)\le x(x-1)^2$.

令 $g(x)=x(x-1)^2, x\in(0,1)$，则 $g'(x)=3\left(x-\dfrac{1}{3}\right)(x-1)$.

令 $g'(x)=0$，得 $x=\dfrac{1}{3}$.

列表如下：

x	$(0,\frac{1}{3})$	$\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{3},1)$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$

所以当 $x=\dfrac{1}{3}$ 时，$g(x)$ 取得极大值，且是最大值，故 $g(x)_{\max}=g\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{4}{27}$.

所以当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)\leqslant g(x)\leqslant\dfrac{4}{27}$.

因此 $M\le\dfrac{4}{27}$.

20.（本小题满分 16 分）

定义首项为 1 且公比为正数的等比数列为“$M-$ 数列”.

（1）已知等比数列 $\{a_n\}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 满足：$a_2a_4=a_5$，$a_3-4a_2+4a_1=0$，求证：数列 $\{a_n\}$ 为“$M-$ 数列”；

（2）已知数列 $\{b_n\}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 满足：$b_1=1$，$\dfrac{1}{S_n}=\dfrac{2}{b_n}-\dfrac{2}{b_{n+1}}$，其中 S_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

① 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式；

② 设 m 为正整数，若存在“$M-$ 数列”$\{c_n\}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$，对任意正整数 k，当 $k\le m$ 时，都有 $c_k\le b_k\le c_{k+1}$ 成立，求 m 的最大值.

解　（1）设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，所以 $a_1\ne 0$，$q\ne 0$.

由 $\begin{cases}a_2a_4=a_5\\a_3-4a_2+4a_1=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}a_1^2q^4=a_1q^4\\a_1q^2-4a_1q+4a_1=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a_1=1\\q=2\end{cases}$.

因此数列 $\{a_n\}$ 为“$M-$ 数列.

（2）① 因为 $\dfrac{1}{S_n}=\dfrac{2}{b_n}-\dfrac{2}{b_{n+1}}$，所以 $b_n\ne 0$.

试由 $b_1=1$，$S_1=b_1$，得 $\dfrac{1}{1}=\dfrac{2}{1}-\dfrac{2}{b_2}$，则 $b_2=2$.

由 $\dfrac{1}{S_n}=\dfrac{2}{b_n}-\dfrac{2}{b_{n+1}}$，得 $S_n=\dfrac{b_nb_{n+1}}{2(b_{n+1}-b_n)}$.

当 $n\ge 2$ 时，由 $b_n=S_n-S_{n-1}$，得 $b_n=\dfrac{b_nb_{n+1}}{2\left(b_{n+1}-b_n\right)}-\dfrac{b_{n-1}b_n}{2\left(b_n-b_{n-1}\right)}$，整理得 $b_{n+1}+b_{n-1}=2b_n$.

所以数列 $\{b_n\}$ 是首项和公差均为 1 的等差数列.

因此，数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n=n$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.

② 由①知，$b_k=k, k\in\mathbf{N}^*$.

因为数列 $\{c_n\}$ 为“$M-$ 数列”，设公比为 q，所以 $c_1=1$，$q>0$.

因为 $c_k\le b_k\le c_{k+1}$，所以 $q^{k-1}\le k\le q^k$，其中 $k=1,2,3,\cdots,m$.

当 $k=1$ 时，有 $q\ge 1$；当 $k=2,3,\cdots,m$ 时，有 $\dfrac{\ln k}{k}\leqslant\ln q\leqslant\dfrac{\ln k}{k-1}$.

设 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ $(x>1)$，则 $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

令 $f'(x)=0$，得 $x=e$.

列表如下:

x	$(1,e)$	e	$(e,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$

因为 $\dfrac{\ln 2}{2}=\dfrac{\ln 8}{6}<\dfrac{\ln 9}{6}=\dfrac{\ln 3}{3}$，所以 $f(k)_{\max}=f(3)=\dfrac{\ln 3}{3}$.

取 $q=\sqrt[3]{3}$，当 $k=1,2,3,4,5$ 时，$\dfrac{\ln k}{k}\leq \ln q$，即 $k\leq q^k$，爸检验知 $q^{k-1}\leq k$ 也成立.

因此所求 m 的最大值不小于 5.

若 $m\geq 6$，分别取 $k=3,6$，得 $3\leq q^3$，且 $q^5\leq 6$，从而 $q^{15}\geq 243$，且 $q^{15}\leq 216$，所以 q 不存在，因此所求 m 的最大值小于 6.

综上，所求 m 的最大值为 5.

附加题

24. **【选做题】本题包括** A、B、C **三小题，请选定其中两小题，并在相应的答题区域内作答**. **若多做，则按作答的前两小题评分**. **解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤**.

A.**【选修** $4-2$**：矩阵与变换】**（本小题满分 10 分）

已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix}$.

（1）求 A^2；（2）求矩阵 A 的特征值.

解　（1）因为 $A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix}$，所以 $A^2=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\times 3+1\times 2 & 3\times 1+1\times 2\\ 2\times 3+2\times 2 & 2\times 1+2\times 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11 & 5\\ 10 & 6\end{bmatrix}$.

（2）矩阵 A 的特征多项式为 $f(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -1\\ -2 & \lambda-2\end{vmatrix}=\lambda^2-5\lambda+4$.

令 $f(\lambda)=0$，解得 A 的特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=4$.

B.**【选修** $4-4$**：坐标系与参数方程】**（本小题满分 10 分）

在极坐标系中，已知两点 $A(3,\dfrac{\pi}{4}),B(\sqrt{2},\dfrac{\pi}{2})$，直线 l 的方程为 $\rho\sin(\theta+\dfrac{\pi}{4})=3$.

（1）求 A,B 两点间的距离；（2）求点 B 到直线 l 的距离.

解　（1）设极点为 O.

$\triangle OAB$ 中，$A(3,\dfrac{\pi}{4}),B(\sqrt{2},\dfrac{\pi}{2})$，由余弦定理得 $AB=\sqrt{3^2+(\sqrt{2})^2-2\times 3\times\sqrt{2}\times\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{5}$.

（2）因为直线 l 的方程为 $\rho\sin(\theta+\dfrac{\pi}{4})=3$，则直线 l 过点 $(3\sqrt{2},\dfrac{\pi}{2})$，倾斜角为 $\dfrac{3\pi}{4}$.

又 $B(\sqrt{2},\dfrac{\pi}{2})$，所以点 B 到直线 l 的距离为 $(3\sqrt{2}-\sqrt{2})\times\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}-\dfrac{\pi}{2}\right)=2$.

C.**【选修** $4-5$**：不等式选讲】**（本小题满分 10 分）

设 $x\in\mathbf{R}$，解不等式 $|x|+|2x-1|>2$.

解　当 $x<0$ 时，原不等式可化为 $-x+1-2x>2$，解得 $x<-\dfrac{1}{3}$；

当 $0 \le x \le \dfrac{1}{2}$ 时，原不等式可化为 $x+1-2x>2$，即 $x<-1$，无解；

当 $x>\dfrac{1}{2}$ 时，原不等式可化为 $x+2x-1>2$，解得 $x>1$.

综上，原不等式的解集为 $\{x \mid x<-\dfrac{1}{3}$ 或 $x>1\}$.

【必做题】第 22 题、第 23 题，每题 10 分，共计 20 分. 请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

25. （本小题满分 10 分）

设 $(1+x)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n, n\geqslant 4, n\in\mathbf{N}^*$. 已知 $a_3^2=2a_2a_4$.

（1）求 n 的值；（2）设 $(1+\sqrt{3})^n=a+b\sqrt{3}$，其中 $a,b\in\mathbf{N}^*$，求 a^2-3b^2 的值.

解 （1）因为

$$(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^nx^n,\ n\ge 4,$$

所以

$$a_2=C_n^2=\frac{n(n-1)}{2},\quad a_3=C_n^3=\frac{n(n-1)(n-2)}{6},\quad a_4=C_n^4=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}.$$

因为 $a_3^2=2a_2a_4$，所以 $\left(\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}\right)^2=2\times\dfrac{n(n-1)}{2}\times\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$，解得 $n=5$.

（2）由（1）知，$n=5$.

$$\begin{aligned}(1+\sqrt{3})^n&=(1+\sqrt{3})^5\\&=C_5^0+C_5^1\sqrt{3}+C_5^2(\sqrt{3})^2+C_5^3(\sqrt{3})^3+C_5^4(\sqrt{3})^4+C_5^5(\sqrt{3})^5\\&=a+b\sqrt{3}.\end{aligned}$$

解法一 因为 $a,b\in\mathbf{N}^*$，所以 $a=C_5^0+3C_5^2+9C_5^4=76,\ \ b=C_5^1+3C_5^3+9C_5^5=44$.

从而 $a^2-3b^2=76^2-3\times44^2=-32$.

解法二

$$\begin{aligned}(1-\sqrt{3})^5&=C_5^0+C_5^1(-\sqrt{3})+C_5^2(-\sqrt{3})^2+C_5^3(-\sqrt{3})^3+C_5^4(-\sqrt{3})^4+C_5^5(-\sqrt{3})^5\\&=C_5^0-C_5^1\sqrt{3}+C_5^2(\sqrt{3})^2-C_5^3(\sqrt{3})^3+C_5^4(\sqrt{3})^4-C_5^5(\sqrt{3})^5\end{aligned}$$

因为 $a,b\in\mathbf{N}^*$，所以 $(1-\sqrt{3})^5=a-b\sqrt{3}$.

因此 $a^2-3b^2=(a+b\sqrt{3})(a-b\sqrt{3})=(1+\sqrt{3})^5\times(1-\sqrt{3})^5=(-2)^5=-32$.

26. （本小题满分 10 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，设点集 $A_n=\{(0,0),(1,0),(2,0),\cdots,(n,0)\}$，$B_n=\{(0,1),(n,1)\}$，$C_n=\{(0,2),(1,2),(2,2),\cdots,(n,2)\}, n\in\mathbf{N}^*$. 令 $M_n=A_n\cup B_n\cup C_n$，从集合 M_n 中任取两个不同的点，用随机变量 X 表示它们之间的距离.

（1）当 $n=1$ 时，求 X 的概率分布；

（2）对给定的正整数 $n\ (n\ge 3)$，求概率 $P(X\le n)$（用 n 表示）.

解 （1）当 $n=1$ 时，X 的所有可能取值是 $1,\sqrt{2},2,\sqrt{5}$.

X 的概率分布为

$$P(X=1)=\frac{7}{C_6^2}=\frac{7}{15},\ P(X=\sqrt{2})=\frac{4}{C_6^2}=\frac{4}{15},\ P(X=2)=\frac{2}{C_6^2}=\frac{2}{15},\ P(X=\sqrt{5})=\frac{2}{C_6^2}=\frac{2}{15}.$$

（2）设 $A(a,b)$ 和 $B(c,d)$ 是从 M_n 中取出的两个点.

因为 $P(X\le n)=1-P(X>n)$，所以仅需考虑 $x>n$ 的情况.

① 若 $b=d$，则 $AB\le n$，不存在 $X>n$ 的取法;

② 若 $b=0,d=1$，则 $AB=\sqrt{(a-c)^2+1}\le\sqrt{n^2+1}$，所以 $X>n$ 当且仅当 $AB=\sqrt{n^2+1}$，此时 $a=0,c=n$ 或 $a=n,c=0$，有 2 种取法;

③ 若 $b=0,d=2$，则 $AB=\sqrt{(a-c)^2+4}\le\sqrt{n^2+4}$. 因为当 $n\ge 3$ 时，$\sqrt{(n-1)^2+4}\le n$，所以 $X>n$ 当且仅当 $AB=\sqrt{n^2+4}$，此时 $a=0,c=n$ 或 $a=n,c=0$，有 2 种取法;

④ 若 $b=1,d=2$，则 $AB=\sqrt{(a-c)^2+1}\le\sqrt{n^2+1}$，所以 $X>n$ 当且仅当 $AB=\sqrt{n^2+1}$，此时 $a=0,c=n$ 或 $a=n,c=0$，有 2 种取法.

综上，当 $X>n$ 时，X 的所有可能取值是 $\sqrt{n^2+1}$ 和 $\sqrt{n^2+4}$，且

$$P\left(X=\sqrt{n^2+1}\right)=\frac{4}{C_{2n+4}^2},\quad P\left(X=\sqrt{n^2+4}\right)=\frac{2}{C_{2n+4}^2}.$$

因此，$P(X\leqslant n)=1-P\left(X=\sqrt{n^2+1}\right)-P\left(X=\sqrt{n^2+4}\right)=1-\dfrac{6}{C_{2n+4}^2}$.