江苏省仪征中学2020届高三上学期数学周末自助餐（理2）

班级__________ 学号__________姓名__________成绩__________

一、填空题：

1. 设 $A=\{x|x^2-8x+15=0\}$， $B=\{x|ax-1=0\}$，若 $B\subseteq A$，则实数 a 组成的集合 C=____________.

2. 若复数 $z=a^2-1+(a+1)\mathrm{i}(a\in\mathbf{R})$是纯虚数，则$\dfrac{1}{z+a}$的虚部为______.

3. 若 A：$\log_2 a<1$，B：x 的二次方程 $x^2+(a+1)x+a-2=0$ 的一个根大于零，另一个根小于零，则 A 是 B 的_____________条件.

4. 若命题“$\forall x\in\mathbf{R}$，$ax^2-ax-2\leqslant0$”是真命题，则实数 a 的取值范围是____________.

5. 已知函数 $f(x)$的定义域是[0，2]，则函数 $g(x)=f(x+\dfrac{1}{2})+f(x-\dfrac{1}{2})$的定义域是____________.

6. 已知函数 $f(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+b\ln x$ 在区间$[2，+\infty)$上是减函数，则 b 的取值范围是_________.

7. 定义在区间$[0，3\pi]$上的函数 $y=\sin 2x$ 的图象与 $y=\cos x$ 的图象的交点个数是_________.

8. 若动点 $P_1(x_1，y_1)$，$P_2(x_2，y_2)$ 分别在直线 l_1：$x-y-5=0$，l_2：$x-y-15=0$ 上移动，则 P_1P_2 的中点 P 到原点的距离的最小值是__________.

9. 在△ABC 中，$A=90°$，$AB=1$，$AC=2$．设点 P，Q 满足$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AQ}=(1-\lambda)\overrightarrow{AC}$，$\lambda\in\mathbf{R}$．若$\overrightarrow{BQ}\ \overrightarrow{CP}=-2$，则 $\lambda=$________.

10. 若实数 x，y 满足 $2x^2+xy-y^2=1$，则$\dfrac{x-2y}{5x^2-2xy+2y^2}$的最大值为________.

二、解答题：

11.在ΔABC中，角A,B,C的对边分别为a,b,c，已知$c=\dfrac{\sqrt{5}}{2}b$.

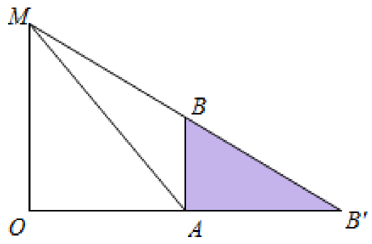
（1）若$C=2B$，求$\cos B$的值；

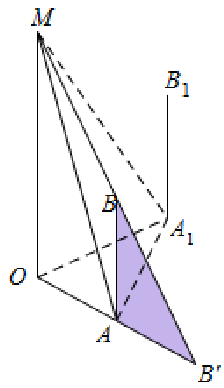
（2）若$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$，求$\cos(B+\dfrac{\pi}{4})$的值.

12.已知小明（如图中 AB 所示）身高 1.8 米，路灯 OM 高 3.6 米，AB，OM 均垂直于水平地面，分别与地面交于点 A，O．点光源从 M 发出，小明在地面上的影子记作 AB'．

（1）小明沿着圆心为 O，半径为 3 米的圆周在地面上走一圈，求 AB' 扫过的图形面积；

（2）若 $OA=3$ 米，小明从 A 出发，以 1 米/秒的速度沿线段 AA_1 走到 A_1，$\angle OAA_1=\frac{\pi}{3}$，且 $AA_1=10$ 米．t 秒时，小明在地面上的影子长度记为 $f(t)$（单位：米），求 $f(t)$ 的表达式与最小值．





参考答案：

1. 解析：$A=\{x|x^2-8x+15=0\}=\{3,5\}$，由于 $B\subseteq A$，所以①若 $B=\varnothing$，满足 $B\subseteq A$，此时 $a=0$；②若 $B\neq\varnothing$，此时 $a\neq 0$，方程 $ax-1=0$ 的根为 $x=\frac{1}{a}$，又因为 $B\subseteq A$，$\therefore \frac{1}{a}=3$ 或 $\frac{1}{a}=5$，$\therefore a=\frac{1}{3}$或$\frac{1}{5}$；综上，适合题意的实数 a 组成的集合为 $\left\{0,\frac{1}{5},\frac{1}{3}\right\}$.

2. 解析：由题意$\begin{cases}a^2-1=0,\\ a+1\neq 0,\end{cases}$ $\therefore a=1$，$\therefore \frac{1}{z+a}=\frac{1}{1+2i}=\frac{1-2i}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$，$\therefore \frac{1}{z+a}$的部为$-\frac{2}{5}$.

3. 解析：由 $\log_2 a<1$，解得 $0<a<2$；而方程 $x^2+(a+1)x+a-2=0$ 的一根大于零，另一根小于零的充要条件：令 $f(x)=x^2+(a+1)x+a-2$，$f(0)<0$， 即 $a-2<0$，解得 $a<2$．因为“若 $0<a<2$，则 $a<2$”是真命题，而“若 $a<2$，则 $0<a<2$”是假命题，所以“$0<a<2$”是“$a<2$”的充分不必要条件，所以 A 是 B 的充分不必要条件.

4. 解析：当 $a=0$ 时，不等式显然成立；当 $a\neq 0$ 时，由题意知$\begin{cases}a<0,\\ \Delta=a^2+8a\leqslant 0,\end{cases}$ 得$-8\leqslant a<0$.
综上，$-8\leqslant a\leqslant 0$.

5.解析：$\because$函数 $f(x)$的定义域是[0，2]，$\therefore$函数 $g(x)=f(x+\frac{1}{2})+f(x-\frac{1}{2})$中$\begin{cases}0\leqslant x+\frac{1}{2}\leqslant 2,\\ 0\leqslant x-\frac{1}{2}\leqslant 2,\end{cases}$ 解得：$\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}$，$\therefore$函数 $g(x)$的定义域是$[\frac{1}{2}，\frac{3}{2}]$.

6. 解析：$f'(x)=-x+\frac{b}{x}\leq 0$ 在$[2，+\infty)$上恒成立，即 $b\leq x^2$ 在$[2，+\infty)$上恒成立，$\therefore b\in(-\infty，4]$.

7. 解析：令 $\sin 2x=\cos x$ 得 $\cos x=0$ 或 $\sin x=\frac{1}{2}$，又由 $x\in[0，3\pi]$可解得 x 共有七个，故交点有 7 个.

8. 解析：因为 P_1P_2 的中点 P 的轨迹方程为 l：$x-y-10=0$，所以点 P 到原点的距离的最小值是原点到 l：$x-y-10=0$ 的距离，即 $\frac{|-10|}{\sqrt{2}}=5\sqrt{2}$.

9. 解析：$\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AB}=(1-\lambda)\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{BQ}\ \overrightarrow{CP}=(\lambda-1)\overrightarrow{AC}^2-\lambda\overrightarrow{AB}^2=4(\lambda-1)-\lambda=3\lambda-4=-2$，即 $\lambda=\frac{2}{3}$.

10.解析：由 $2x^2+xy-y^2=1$，得$(2x-y)(x+y)=1$，设 $2x-y=t$，$x+y=\frac{1}{t}$，其中 $t\neq 0$.则 $x=\frac{1}{3}t+\frac{1}{3t}$，$y=\frac{2}{3t}-\frac{1}{3}t$，从而 $x-2y=t-\frac{1}{t}$，$5x^2-2xy+2y^2=t^2+\frac{1}{t^2}$，记 $u=t-\frac{1}{t}$，则$\frac{x-2y}{5x^2-2xy+2y^2}=\frac{u}{u^2+2}=\frac{1}{u+\frac{2}{u}}\leq\frac{1}{2\sqrt{u\,\frac{2}{u}}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$，当且仅当 $u=\frac{2}{u}$，即 $u=\sqrt{2}$时取等号，即最大值为$\frac{\sqrt{2}}{4}$.

11.解：（1）因为$c=\frac{\sqrt{5}}{2}b$，则由正弦定理，得$\sin C=\frac{\sqrt{5}}{2}\sin B$．　……………2 分

又$C=2B$，所以$\sin 2B=\frac{\sqrt{5}}{2}\sin B$，即$4\sin B\cos B=\sqrt{5}\sin B$．　……………4 分

又B是ΔABC的内角，所以$\sin B>0$，故$\cos B=\frac{\sqrt{5}}{4}$．　…………6 分

（2）因为$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$，　所以$cb\cos A=ba\cos C$，

则由余弦定理，得$b^2+c^2-a^2=b^2+a^2-c^2$，得$a=c$．　…………10 分

从而$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{c^2+c^2-(\frac{2}{\sqrt{5}}c)^2}{2c^2}=\frac{3}{5}$，　………12 分

又$0<B<\pi$，所以$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\frac{4}{5}$．

从而$\cos(B+\frac{\pi}{4})=\cos B\cos\frac{\pi}{4}-\sin B\sin\frac{\pi}{4}=\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{10}$．　……14 分

12.解：（1）由题意$AB\,//\,OM$，$\frac{AB'}{OB'}=\frac{AB}{OM}=\frac{1.8}{3.6}=\frac{1}{2}$，$OA=3$，所以$OB'=6$，

小明在地面上的身影AB'扫过的图形是圆环，其面积为$\pi\times 6^2-\pi\times 3^2=27\pi$(平方米)；

（2）经过t秒，小明走到了A_0处，身影为A_0B_0'，由（1）知$\frac{A_0B_0'}{OB_0}=\frac{AB}{OM}=\frac{1}{2}$，

$\therefore\ f(t)=A_0B_0'=OA_0=\sqrt{OA^2+AA_0^{\ 2}-2OA\cdot AA_0\cos\angle OAA_0}$，

化简得$f(t)=\sqrt{t^2-3t+9},0<t\leqslant 10$，$f(t)=\sqrt{\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{27}{4}}$，当$t=\frac{3}{2}$时，$f(t)$的最小值为$\frac{3\sqrt{3}}{2}$，

答：$f(t)=\sqrt{t^2-3t+9},0<t\leqslant 10$，当$t=\frac{3}{2}$（秒）时，$f(t)$的最小值为$\frac{3\sqrt{3}}{2}$（米）.