中小学生数学创造力的测量与培养①

——以一题多解为进路

赵　弘　杜梦雅

（大连大学教育学院　116622）

创造力作为一种高阶思维能力，被很多国家和国际组织列入了 21 世纪核心素养框架之中. 将创造力的培养落实在数学教学中，其前提是数学创造力的测量问题. 研究发现，中小学生的数学创造力具有动态特征，如果得不到及时而客观的测量或评价，其教学的意义就会被最小化[1]. 这就意味着，要充分发挥学生的创造潜能，评价数学课程或教学的有效性，就迫切需要切实可行的测评学生数学创造力的工具.

数学创造力是从创造力定义中衍生而来的一个概念. 自 20 世纪 50 年代吉尔福德(Guilford)提出“创造力是普通人都具有的一种能力，几乎所有的人都会有创造性行动[2]”以来，心理学家对创造力这一心理特征的研究取得了突破性进展，如将流畅性、灵活性、独创性等作为创造力的主要内容[3]，以发散思维为指标开展创造力的测量等，这些研究结果至今仍影响着数学创造力的研究[4]. 近些年来，数学创造力的研究以中小学生为研究对象，围绕数学创造力的概念界定、测评和培养等问题，进行了较为深入的探讨[5].

本文在综述数学创造力研究文献、评论数学创造力测量方法的基础上，介绍以色列数学教育研究者莱金(Leikin)设计的一项中小学生数学创造力测量模型.

1　中小学生数学创造力(mathematical creativity)的特点

数学创造力是一个多侧面的现象，为数学创造力下一个广为接受的定义非常困难. 为了研究中小学生的数学创造力，研究者力图从不同角度揭示其特征.

1.1　相对性(relative)

中小学生的数学创造力不同于数学家的数学创造力，数学家拥有的是绝对创造力(absolute creativity)，这是一种“产生前所未有成果、明显地扩展或综合了数学知识体系，或为其他数学家开辟了思考问题途径的能力[6]”. 虽然中小学生一般不会创造举世瞩目的数学成果，却可以提出，相对于学生已经学过的数学和已经解决的问题而言，新的见解或解决方案，这是一种相对创造力(relative creativity)[7]，即一个特定的人在一个特定的参考群体中的发现. 克鲁杰茨基认为，中小学生的数学创造力是“对简单数学问题的独特表述、找到解决问题的方法和途径、发明定理的证明方法、独立推导公式，或者寻找解决非标准问题的原始方法等[8]”.

既然中小学生的数学创造力具有相对性，那么参照其以往的经验或者其他具有相似教育背景学生的表现，测量或评价数学创造力是可行的.

1.2　领域特殊性(domain specific)

不同领域的创造力需要不同的创造成分与认知技能，在某一领域具备创造力并不意味着在其他领域也具备相应的创造力[9]. 中小学生的数学创造力，作为数学这一具体学科领域的创造力，必须涉及数学和创新两个方面[10]. 例如，罗密伊(Romey)将数学创造力定义为“能够以一种新的方式组合数学的思想、技能或方法”[11]，显然，头脑中拥有的数学概念、思想越多，产生的组合也越多，获得成功创造的可能性也越大；埃尔文克

① 本文系辽宁省教育科学“十三五”规划课题：《辽宁省小学生基于真实情境解决数学问题能力的调查与研究》(课题批准号：*JG18CB374*)的阶段成果.

(Ervynck)认为数学创造力是高水平数学思维的重要组成部分,是个人在以往经验的基础上,向新的方向迈出一步[12].

以上定义表明数学创造力具有数学领域的特殊性,即数学创造力根植于数学知识的积累,以对数学知识的理解、直觉和洞察为基础,因而在评价或测量数学创造力的过程中,应该充分考虑到学生对数学知识的深度理解和掌握.

1.3 发散性(divergent)

中小学生的数学创造力常常体现在解题过程(process)的灵活性或结果(product)的发散性[13]上,例如,在数学情境中提出与因果相关的假设(hypotheses concerning cause and effect)、将一般数学问题分解为子问题、打破思维定势(Einstellung),以及在必要的时候,脱离模式化的刻板解法突破现有的框架[14].

鉴于发散性产品的可测性,加之发散思维本质上是一种开放性思维,常常能够克服心理定势,从而导致新方法的产生[15],发散思维测验常常被研究者用来开展中小学生的数学创造力测量.

发散思维通常要求学生给出问题的多种解决方案,一些研究者将考查中小学生数学创造力的首要标准确定为"一题多解"能力,即"对于一个数学问题给出多种解法的能力[15]、提出不止一种可行的而且非同寻常的解决问题方案的能力[16];针对文字、图片以及表格等真实的数学情境,能够提出多种不同且适用的数学问题[17]等.

莱金则以一题多解为任务,设计了一套数学创造力测量的模型.本文将在以下篇幅阐述该模型的使用方法和步骤.

2 中小学生数学创造力的测量

一题多解任务(A Multiple－Solution Task,简称 MST)指的是答案唯一而解法多样的数学问题[18],这样的问题在数学教学中大量存在.为了较为准确地测量数学创造力,模型首先界定了数学创造力的结构.

2.1 数学创造力的结构

2.1.1 数学创造力的成分

霍兰兹(Hollands)提出中小学生在学习数学过程中的创造性表现在以下分为五个方面:灵活性 (flexibility),表现为改变方法或提出各种不同的方法;精致化(elaboration),表现为方法的扩展或改进;流畅性(fluency),表现为在短时间内产生许多想法;独创性(originality),表现为尝试新颖或不寻常的方法;敏感性(sensitivity),表现为对标准方法的建设性批判[19].

西佛尔(Silver)认为,经由问题解决,提升学生的数学创造力的具体做法是,通过对一个问题产生多个答案(如果存在的话)、探索各种情况和提出多个想法来发展流畅性(fluency);当至少有一个解法的时候,再提出新的关联解法来提高,此乃灵活性(flexibility);新颖性(novelty)是通过当已经有许多解法时,再提出一个新的解法来提高的[20].

曼恩(Mann) 建议数学创造力有五个成分,即在托伦斯提出的创造力流畅性(fluency)、灵活性(flexibility)、新颖性(novelty)和精致性四个成分的基础上,增加"打破旧习(iconoclasm)"这一成分[21].

参照以上研究,莱金(2007)将学生在 MST 中表现出的数学创造力分为三个组成部分,分别是流畅性(fluency)、灵活性(flexibility)和独创性(originality).其中流畅性由学生给出正确解法的个数确定,灵活性(flexibility)由学生解法所属不同类型的情况确定,独创性由学生所提出解的稀有性确定[22].

2.1.2 数学创造力的水平

埃尔文克(Ervynck)针对学生在 MST 中产生的多种解法,将其数学创造力分成了三个等级的水平.[22]

第一级是运用固定程序的解法(algorithmic solution)的水平,该等级的表现是利用现成的公式解题.例如通过加减消元法或代入消元法解二元一次方程组.

第二级是借助模型(modelling a situation)的水平,该等级的表现是利用在数学解题中普遍适用的方法解决当前的问题.例如用画线段图或者做表格的方法解答应用题.

第三级是采用巧妙方法(sophisticated methods)的水平,该等级的表现是利用发现问题中隐含的假设,充分运用内部结构的解法,采用了非常规的解法.例如,应用题"一根铁丝的$\frac{2}{3}$重$\frac{4}{5}$公斤,请问一根铁丝重几公斤?",解法"$\frac{4}{5}\div 2=\frac{2}{5}$,$\frac{2}{5}\times 3=1\frac{1}{5}$"第一步是为了找一根铁丝的$\frac{1}{3}$,第二步

是从$\frac{1}{3}$找一根. 这种"先找到子单位$\frac{1}{3}$的重量,再乘 3""以获得一单位的解法,洞察到问题结构,巧妙地运用了"一个子单位以找一个全单位的策略.[23]

基于以上研究,莱金(2009)将数学创造力的三个组成部分与三种水平的划分相结合,提出了以下以 MST 为工具的数学创造力测量模型.[24]

2.2 测量模型

2.2.1 独创性

分为两种情况.

第一种情况:对于 10 人以下小组,依据学生解法的常规性或者顿悟(insight)水平,将独创性分为三级并采取十分制评分.

第一级:$Or_i=10$,运用基于顿悟的或者非常规的解法.

第二级:$Or_i=1$,运用某种模型的或者部分非常规的解法.

第三级:$Or_i=0.1$,运用基于固定算法的常规解法.

第二种情况:对于 10 人以上小组,根据有相同解法的人数占小组总人数的百分数,将独创性分为三级并采取十分制评分.

第一级:$Or_i=10$,低于 15%;

第二级:$Or_i=1$,在 15%与 40%之间;

第三级:$Or_i=0.1$,高于 40%.

独创性总分是学生各个解法独创性得分的和,即 $Or=\sum_{i=1}^{n}Or_i$,n 表示所有正确解法的数量.

独创性采用十进制的计分法,可以明显看出解题者运用了多少种解法,以及每种解法的独创性情况. 例如,一名解题者的独创性总分 $Or=21.3$,表明共运用了 6(=2+1+3)种解法,其中 2 种非常规解法,1 种部分非常规解法和 3 种常规解法.

2.2.2 灵活性

根据解法所运用策略所属的类型,将灵活性分为三级并采取十分制评分.

第一级:$Flx_i=10$,在某种类型中第一次出现的解法,或者非第一次出现但是与以前出现的解法属于不同类型的解法.

第二级:$Flx_i=1$,与以前出现过的解法运用了同一类型解题策略,且两者有明显的细微区别的解法.

第三级:$Flx_i=0.1$,与以前出现过的解法几乎完全相同的解法.

灵活性总分是学生提出的所有解法灵活性得分的和,即 $Flx_i=\sum_{i=1}^{n}Flx_i$,$n$ 表示所以正确解法的数量.

灵活性与独创性采用十进制积分法,原因与独创性类似.

2.2.3 流畅性

该模型没有对流畅性进行分级,只要解法正确即得 1 分,依次累加. 正确解法的总数等于流畅性总分. 笔者认为,之所以如此计分,是因为在发散性思维中,流畅性处于较低层次,仅仅体现了思维发散在数量方面的特点.

2.2.4 数学创造力

每一个正确解法的数学创造力得分,等于该解法的独创性得分与灵活性得分的乘积,即$Cr_i=Flx_i\times Or_i$. 笔者认为,之所以如此计分,是因为在发散性思维中,灵活性和原创性均处于较高层次,其中灵活性表现了思维发散的变通性,为思维开拓了新的思路,产生新的解法;独特性居于创造力的最高层次,表现在思维突破常规解法的束缚,产生新颖独创的成果.

莱金通过两例对以上模型进行进一步的说明.

例如,某学生只采用了一种解法,这种解法是小组中独一无二的解法,这种解法的创造力是满分. 按照计分规则,因为是独一无二的解法,说明运用了非常规解法,独创性 $Or_i=10$;因为是第一次出现的解法,灵活性 $Flx_i=10$,则创造力 $Cr_i=10\times10=100$.

如果这名学生经过思考,又获得了一个在小组中与其他人不同的解法,不过这种解法与他自己前面得到的解法存在相似之处,那么,这种新解法的创造力分数就会下降. 按照计分规则,虽然独创性 $Or_i=10$,但由于该解法与其他解法之间的相似性,灵活性 $Flx_i=1$ 或 0.1,那么创造力得分就是 $Cr_i=10\times1=10$,或者 $10\times0.1=1$.

最后,流畅性表现在解法的准确性或者适宜性,模型将流畅性作为创造力的一个必要组成部分,学生在 MST 上表现出的数学创造力等于流畅性总分与各种正确解法创造力之和的乘积:

$Cr=n(\sum_{i=1}^{n} Flx_i \times Or_i)$.

2.3 模型举例

下面依据 MST 模型，对两名小学六年级资优生(生甲、生乙)解答一道应用题时，各自得到的多种解法进行计分，具体说明如何运用模型测量学生的数学创造力(见下表). 为了保证原创性和灵活性计分的信度，笔者与另外一名数学教育研究者同时打分，并利用 SPSS 统计软件对评分者一致性进行了检验，相关性达到 0.875*. 对于评分有差异的部份，又各自提出说明，最后提出讨论后共识的分数，如表 1.

生甲得到了 4 个正确解法，生乙得到了 5 个正确解法，其中两名学生有相同的解法，两人共提出 6 个不同的正确解法，本文将解法分为四类，各个解法及两名学生的数学创造力计分情况见表 1.

表1 数学创造力计分表

问题:用多种方法解答:冬天，夜长是昼长的 $1\frac{2}{7}$，求昼长和夜长各多少小时?						
解法分类	解题者	解法	流畅性计分	灵活性 Flx_i 计分	独创性 Or_i 计分	一种解法的数学创造力得分 $Cr_i=Flx_i\times Or_i$
1.量率对应法	生甲 生乙	1-1 将昼长作为单位1(是该类型第一次出现的解法，常规解法.)	1	10	0.1	1
	生甲 生乙	1-2 将夜长作为单位1(与1.1是同一类型，较少人采用.)	1	1	1	1
2.代数法	生甲 生乙	2-1 列方程(属于一种新类型的解法，常规解法)	1	10	1	10
3.比例法	生甲	3-1 昼长:夜长=7:9(属于一种新类型的解法，平时作业中见过的解法)	1	10	1	10
4.补足法	生乙	4-1 $\frac{8}{7}$昼长=半天(属于一种新类型的解法，非常规解法)	1	10	10	100
	生乙	4-2 3个昼长=24小时+昼长的$\frac{5}{7}$(与4.1是同一类型，非常规解法)	1	1	10	10
生甲		求和	4	31	3.1	22
		本题的数学创造力得分 4×22=88				
生乙		求和	5	32	22.1	122
		本题的数学创造力得分 5×122=610				

生甲和生乙产生的四种类型，共六个解法中每个解法的灵活性根据解法所属的类型来确定，每种类型中第一次出现的解法计 10 分，再次出现的解法计 1 分.

对每种解法的独创性做以下说明：

第一类包括两种解法(解法 1-1,1-2).

解法 1-1:根据题意，把昼长当作 1，则夜长为 $1\frac{2}{7}$，则用 $24\div\left(1+\frac{9}{7}\right)$ 可得到昼长；进而求得夜长。

解法 1-2:变化题意，改设夜长为 1，则昼长为 $\frac{7}{9}$，则用 $24\div\left(1+\frac{7}{9}\right)$ 可求得夜长，进而求得昼长。

两种解法均采取了量率对应的解题策略，虽然两种解法在教材和课堂上常用的解法，解法 1-1 严格按照学习过的解题方法和步骤，采用的是常规解法，解法 1-2 对于题意进行了一定的转换，视为部分非常规解法，故解法 1-1 的独创性计 0.1 分，解法 1-2 的独创性计 1 分.

第二类包括一种解法(解法 2-1).设昼长为 x,则建立 $x+\frac{9}{7}x=24$ 的等量关系列方程,解方程可得昼长,进而求得夜长.该解法采取了列方程的解题策略,这种解法小学生虽然在书中接触过,而由于小学生对方程思想不够熟悉,故视为部分非常规解法,独创性计 1 分.

第三类包括一种解法(解法 3-1).因为昼长∶夜长$=1:\frac{9}{7}=7:9$,得到昼长占全天的 $\frac{7}{9+7}$,则求得昼长,进而求得夜长.该解法利用了比例模型,这种分数与份数相互转化的解题策略,小学生在平时的作业中有过接触,视为部分非常规解法,独创性得 1 分.

第四类包括两种解法(解法 4-1,4-2).

解法 4-1:通过作图,因夜长比昼长多 $\frac{2}{7}$ 将昼长补上 $\frac{1}{7}$ 就等于夜长,则昼长、夜长各占半天.所以昼长的 $\frac{8}{7}$ 等于 12 小时,则 $12\div\frac{8}{7}$ 等于昼长.见图 1.

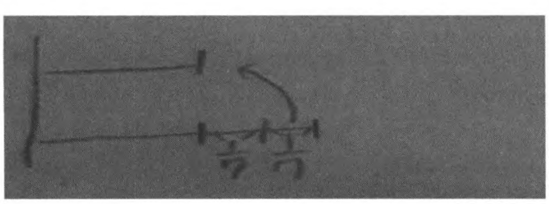

图 1 补足对等法

解法 4.2:因夜长比昼长多 $\frac{2}{7}$,将夜长再补足昼长的 $\frac{5}{7}$ 后,见图 2 的虚线部分,可以看到出现了 3 个昼长,进一步观察图 2 可以发现,这 3 个昼长还可以看作:昼长加上夜长(24 小时)加上补足的 $\frac{5}{7}$ 昼长,若昼长为 x,则 $\left(3x=24+\frac{5}{7}x\right)$.

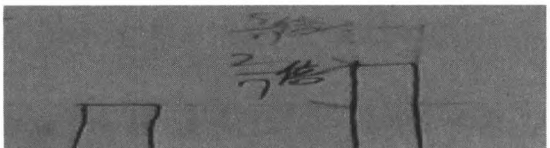

图 2 补足对应法

两种解法均巧妙利用了昼长、夜长之间的数量关系,视为非常规解法,两种解法的独创性得分均为 10 分.

从表 1 可以看出,生甲由于采用的解法数量较少,解法的流畅性与灵活性上得分较低,而且没有采用新颖的解法,故原创性得分也较低.而生乙采用的解法数量多于生甲,且找到了题目隐含的数量关系,且采用了非常规的解法,故流畅性、灵活性和独创性三个要素的得分均高于生甲,因而得到了远远高于生甲的数学创造力分数.两名学生的数学创造力分数说明,生甲虽然只比生乙少用了一种解法,而两人的创造性水平差距却比较大,生甲提出的解法缺少独创性是主要原因.

3 对中小学生数学创造力培养的启示

创造力是人类进步的动力,因此数学创造力的培养是值得数学教育领域重视的课题.数学创造力教学中,教师的作用至关重要,表现在不仅要设计合适的教学任务引发学生的创造性思维,还须识别和评价学生的创造性表现,并使用恰当的教学方法和手段,激发学生的数学创造力.本文就教师在一题多解任务中的数学创造力教学提出以下四点建议,希望对我国的中小学生数学创造力培养提供些许启发.

3.1 鼓励多种解法 发展思维的流畅性

一题多解任务在中小学数学教学中广泛存在,许多数学题目如果深入探究都有着不止一种解法.然而,许多教师在教学中,往往因为赶进度,有了解答就结束了该题的解题活动,忽略了一题多解的互动可以引发学生们的头脑风暴,错过了激发学生提出更多解题方法的机会.一题多解不仅有助于不同思维层次的学生都寻找到适合自己的解决问题方法,还有助于调动学生的创造潜能.本文中提到的生甲和生乙,能够提出解法 3－1,以及 4－1 和 4－2,就是在研究者提示“请再想想,尽可能多地提出解法”后,得到的创新解法.因此教师在教学时,一方面要给予学生充分的思考时间;另一方面,给予不同能力水平的学生充分的探究机会.对于能力较强的学生,鼓励他们尽可能多地提出解法,对于能力较低的学生,只要他们能够找到一个解法就应该肯定他们的成就,同时鼓励他们继续探究更多的解法,这样才可能产生多种解法,学生也才有表现出较高数学创造力的可

能.如果课堂时间不够用,应留给学生课后思考或创造的作业.

3.2 鼓励沟通不同解法的连接 启发思维的灵活性

是否能在一题多解任务中培养学生思维的灵活性,教师不仅要提供给学生创新求异的机会,要鼓励学生敢于勇于开拓,引导学生多角度、多方位地灵活地思考问题,更要鼓励学生在不同解法之间建立连结,如能融会贯通,将有助于学生达到解题的灵活性.本文中提到生乙能够提出解法4-1和4-2,是他在研究解法1-1和1-2的图形基础上,多次尝试将昼长和夜长之间的数量关系在图形上进行变化,最后用补足的策略,发现了昼长和夜长之间新的数量关系,进而获得了新的解决问题途径.生甲是在解法1-1和1-2的基础上,将昼长和夜长的分数关系转化为份数关系,获得了3-1的解法.

3.3 鼓励自创解法 促进思维的独特性

在MST模型中,独创性居于最重要的地位,是数学创造力三个组成部分中最重要的要素.而Leikin在使用MST教学时发现,经过一题多解的教学,学生的灵活性和流畅性显著提高,而随着这两个要素得分的提高,解题方法因为整体受试者答对率提高,原创性得分会相对下降.这就意味着,当学生的灵活性增加时,更多的学生在小组中产生更多的解法,则产生唯一的或者独特的解法就变得非常困难[25].因此,独创性是一种"洞见",洞察问题的结构,此"自己所见,他人未必能见"的功夫,较难产生却最值得培养.因此,在教学中,教师不必强求学生解法的独一无二,应鼓励学生不要只有因循公式,尽可能采用自己独创的方法解题,从而提升数学课堂教学中创造性的文化,进而产生出更多创造性的成果.

3.4 鼓励转换解法 提倡非常规解法

在数学教学上,教师为了鼓励学生解题,最好先鼓励学生大胆尝试,用自己的方法求解,不应为了节省时间用自己的解答代替学生解题,否则解答一旦曝光,学生就失去了解题的机会,也失去了发展创造力的机会.不仅如此,提倡学生采用非常规解法,使学生解题的独创性有机会体现出来了.以本文中两个学生为例,通过努力,两人均提出了多种解法,表现出一定的数学创造力.而生甲的数学创造力得分低于生乙很多,主要是少了非常规的解法(独创性),以至于创造力的总分拉大了.生乙提出的解法4-1和解法4-2两种解法,解题步骤是多于1-1或1-2,却是非常规的解法.教师不应因为做法繁琐,简单地用解题使用了几步来判断优劣.而应鼓励学生灵活及转换方法,一旦发现学生有良好的解法,鼓励发表和分享,以激励学生的数学创造力.

参考文献

[1][10][17][18][22][24]LeikinR., Berman A. & Koichu B. (Eds.) Creativity in mathematics and the education of gifted students[M]. Rotterdam: the Netherlands: Sense Publisher (Chapter 9),2009:129—145

[2]Richards, R., Everyday creativity, Eminent creativity, and Health[J]. Creativity Research Journal. 1990(13): 300—326

[3]徐雪芬,辛涛.创造力测量的研究取向和新进展[J].清华大学教育研究,2013,34(1):54—63

[4]Mihaela S., Leikin, R., Sheffield L. J. Advancements in research on creativityand giftedness in mathematics education: introduction to the special issue[J]. ZDM Mathematics Education,2017(49):5—12

[5]王萍萍,鲍建生,周超.中小学生数学创造力培养的研究述评——聚焦课堂[J].数学教育学报,2018,27(6):22—28

[6]Sriraman, B. Are giftedness & creativity synonyms in mathematics? An analysis of constructs within the professional and school realms[J]. The Journal of Secondary Gifted Education, 2005(17): 20—36

[7]Mann, E. L. Creativity: The essence of mathematics[J]. Journal for the Education of the Gifted,2006(30): 236—262

[8][11][14][18]Haylock, D. W. A framework for assessing mathematical creativity in school children[J]. Educational Studies in Mathematics,1987(18): 59—74

[9]Baer. The Case for Domain Specificity of Creativity[J]. Creativity Research Journal,1998(2):173—177

[12][22]Ervynck, G. Mathematical creativity. In D. Tall (Ed.), Advanced mathematical thinking Dordrecht, Netherlands: Kluwer,1991:42—53

[13][20]Silver, E. A. Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing [J]. ZDM,1997(3): 75—80

[15]羡秋盛,李炳汝,吴蓉.医学科研创造性思维之发散与收敛[J].解放军医学管理杂志,2010(5):484—500

[16]Leikin, R., & Lev, M. Multiple solution tasks as a magnifying glass for observation of mathematical creativity[C]. In J.-H. Woo, H.-C. Lew, K.-S. Park, & D.-Y. Seo (Eds.), Proceedings of the 31xl International Conference for the Psychology of Mathematics Education. Korea: The Korea Society of Educational Studies in Mathematics,2007(3):

161－168

[19]Hollands，R.. Educational technology：Aims and objectives in teaching mathematics[J]. Mathematics in School ，1972 (6)：22－23

[21]Mann E. L. Mathematical creativity and school mathematics：indicators of mathematical creativity in middle school students [D]. Connecticut：University of Connecticut，2005：14

[23]王志铭，刘祥通. 一位资优生自发性解题表现之探究～以分数除法之当量除为例[J].（台湾）资优教育季刊，2007(9)：8－19

[25]Leikin，R.，&Sriraman，B.（Eds.）. Creativity and Giftedness：Interdisciplinary perspectives from mathematics and beyond. Advances in Mathematics Education Series. Switzerland：Springer，2016

（上接第10页）

考数学题？在前一段谈竞赛题的时侯我们说了一点，按照本文的说法，如果是个计算题，如算初等函数积分，那有标准方案. 但是，找出阶不大于20的群的同构类，这便是个结构性问题，怎样去思考这个数学题？一个已知答案的题目基本上可以从所问还原出解，一个未知答案的题目就不简单了. 比如，怎样思考黎曼猜想？

念过爱因斯坦自已谈相对论，如 Einstein，Relativity ：The special and general theory，Dover reprint 2010，就会知道他常用的一种思考方法：思维实验（ Gedanken experiment）. 这是一种在我们思维中进行的实验，用作检验一些原则，说明一些现象和结构；学理论物理的人都知道这方法，这是值得向学生介绍的. 事实上学习数学就是一个不断深耕的思维实验. 参考 Wikipedia：Einstein's thought experiments 和文集 J. Robert，F. Mélanie，M. Letitia （eds.）. Thought Experiments in Philosophy，Science and the Arts. Routledge，London 2016，ISBN－10：0415885442.

让我们换个问题：怎样思考线性代数？在这里思考或可以解释为认识. 一般人，若是「不学」线性代数，很难想出「线性结构」. 一个听完线性空间定义的人怎样思考线性结构？实际上我们不去问这样不是数学的问题. 我们是透过习题来增加我们的认识，是透过实践来检验，在这个过程中我们思考「线性结构」的意义. 从线性空间进展为「淡中范畴」是一个实验过程，是多位数学工作者在对代数几何和表示论的线性现象的研究和观察才得出来的结构. 是经过多人修订错误才慢慢地形成现在的结构. 我们现在所知的「线性结构」是得来不易的. 在这里我们看到一个过程：学而后知，知才思新.

常听说我国中学生缺少创新思考，然而过去一百年有几个爱因斯坦、海森堡、格罗滕迪克、哥德尔（Gödel）？百分之九十的创新只不过是闻一求异. 如果我们从来不向我们的学生披露一点数学结构，又怎能叫他们创新呢？

6 结语

在中学减少重复做同样的题目和做太难的题目，在释放出来的部分时间，利用年轻人好新奇的心理，向学生介绍一些比较新的数学内容和结构. 用这些新的教材，在每次高考题中编一两题. 在中学，电脑课教过去五年的事，为什么数学课只讲五百年前的事呢？我们不是建议全面改变现行的中小学数学课程，我们只是说，给现代数学一点空间.

在大学一年级的微积分和线性代数课，减少那些机器可做的习题，引导学生开始结构性的思考，以适应未来的学习. 把释放出来的部分时间，为学生讲一些过去一百年的数学历史，介绍一些比较形式的系统，如拓扑空间，数理逻辑，集合论初步.

我们可以从工程计算看十九世纪的数学成就. 现在随着电子计算机和信息科技的快速发展，各方面数学的应用日趋结构化，如此看来二十世纪的数学好像是从十九世纪过渡到二十一世纪，从计算性过渡到结构性. 难道我们不应该为孩子作些准备，而让他们错过这个新机会吗？（续完）

致谢 感谢在我们的单位和我们访问过的单位的本科生、研究生和老师给我们的批评和建议. 感谢李克正和张英伯老师的鼓励、指导和支持.