4.1.4 组合数的求和

【典型例题】

1.（I） 求 $C_6^2+C_7^2+C_8^2+C_9^2+C_{10}^2$ 的值.

（II） 求 $C_6^2+9C_6^3+9^2C_6^4+9^3C_6^5+9^4C_6^6$ 的值.

特点：上标相同，下标递增1

特点：下标相同，上标递增1，系数等比.（系数的次数与上标相差2）.

解：(1) $C_6^3+C_6^2+C_7^2+\cdots+C_{10}^2-C_6^3$

$=C_7^3+C_7^2+\cdots+C_{10}^2-C_6^3$

$=C_{11}^3-C_6^3$　　链式反应

$=165-20$

$=145$

(2) $C_6^2+9C_6^3+\cdots+9^4C_6^6$

$=\dfrac{9^2C_6^2+9^3C_6^3+\cdots+9^6C_6^6}{9^2}$

$=\dfrac{(C_6^0+9C_6^1+\cdots+9^6C_6^6)-(C_6^0+9C_6^1)}{9^2}$

$=\dfrac{(1+9)^6-1-54}{9^2}$

$=\dfrac{10^6-55}{9^2}$

2.（I） 证明：$C_n^0+2C_n^1+3C_n^2+\cdots+(n+1)C_n^n=(n+2)\cdot 2^{n-1}$

（II） 证明：$3C_2^2+4C_3^2+5C_4^2+\cdots+(n+1)C_n^2=3\cdot C_{n+2}^4$

特点：下标同，上标+1，系数等差（比上标大1）

特点：上标同，下标+1，系数等差（比下标大1）

证：(1) $S=C_n^0+2C_n^1+3C_n^2+\cdots+(n+1)C_n^n$

法1. 倒序相加

$S=(n+1)C_n^n+nC_n^{n-1}+\cdots+C_n^0$

$2S=(n+2)(C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n)$

$S=(n+2)\cdot 2^{n-1}$

$kC_n^k=nC_{n-1}^{k-1}$

法2. 分组求和

$Lhs=(C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n)+(C_n^1+2C_n^2+\cdots+nC_n^n)$

$=2^n+n(C_{n-1}^0+C_{n-1}^1+\cdots+C_{n-1}^{n-1})$

$=2^n+n\cdot 2^{n-1}$

$=(n+2)\cdot 2^{n-1}$

法3. 算两次：$(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^nx^n$

两边同乘x　$x(1+x)^n=C_n^0x+C_n^1x^2+C_n^2x^3+\cdots+C_n^nx^{n+1}$

两边对x求导　$(1+x)^n+nx(1+x)^{n-1}=C_n^0+2C_n^1x+3C_n^2x^2+\cdots+(n+1)C_n^nx^n$

令 $x=1$ 得　$C_n^0+2C_n^1+3C_n^2+\cdots+(n+1)C_n^n=2^n+n\cdot 2^{n-1}=(n+2)\cdot 2^{n-1}$.

(1)　$nC_{n-1}^{k-1}=kC_n^k$

法1.

$Lhs=3(C_3^3+C_4^3+C_5^3+\cdots+C_{n+1}^3)$

$=3(C_4^4+C_4^3+\cdots+C_{n+1}^3)$

$=3(C_{n+1}^4+C_{n+1}^3)$

$=3C_{n+2}^4$

法2. 算两次

构造函数 $f(x)=3(1+x)^2+4(1+x)^3+5(1+x)^4+\cdots+(n+1)(1+x)^n$

要证式子的左边是 $f(x)$ 的 x^2 次系数.

$(1+x)^3+(1+x)^4+\cdots+(1+x)^{n+1}=\dfrac{(1+x)^3-(1+x)^{n+2}}{1-(1+x)}=\boxed{\dfrac{(1+x)^{n+2}-(1+x)^3}{x}}$

令 $g(x)=(1+x)^3+(1+x)^4+\cdots+(1+x)^{n+1}$

则 $f(x)=g'(x)$

$f(x)$ 的 x^2 次系数 即为 $g(x)$ 的 x^3 次系数 $\times 3$ 即为 $y=(1+x)^{n+2}-(1+x)^3$ 的 x^4 次系数 $\times 3$

$3C_{n+2}^4$

3. (苏教版选修2-3课本) 我们曾用组合模型发现了组合恒等式 $C_n^m=C_n^{n-m}$ 和 $C_{n+1}^m=C_n^m+C_n^{m-1}$，其中使用的方法，实际上就是将一个量用两种方法分别算一次，由结果相同构造等式，这是一种非常有用的数学思想方法. 对此，我们并不陌生，如列方程时要从不同的侧面列出表示同一个量的代数式，几何中常用的面积法也是“算两次”的典范. 再如，我们还可以用这种方法，结合二项式定理得到很多组合恒等式.

如由等式 $(1+x)^{2n}=(1+x)^n(1+x)^n$ 可得：

一方面，由恒等式 $(1+x)^{2n}$ 的 x^n 的系数为 C_{2n}^n，

另一方面，$(1+x)^n(1+x)^n=(C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^nx^n)(C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^nx^n)$ 右边 x^n 的系数为 $C_n^0C_n^n+C_n^1C_n^{n-1}+C_n^2C_n^{n-2}+\cdots+C_n^nC_n^0=(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+(C_n^2)^2+\cdots+(C_n^n)^2$

由 $(1+x)^{2n}=(1+x)^n(1+x)^n$ 可得 $(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+(C_n^2)^2+\cdots+(C_n^n)^2=C_{2n}^n$

(Ⅰ) 你能用算两次的方法证明等式 $A_n^m+mA_n^{m-1}=A_{n+1}^m$ 吗?

(Ⅱ) 你能通过算两次独立发现新的组合恒等式吗?

【巩固练习】

1、已知 $(x+1)^n = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + a_3(x-1)^3 + \cdots + a_n(x-1)^n, n \in N^*$.

求 $T_n = a_1 + 2^2a_2 + 3^2a_3 + \cdots + n^2a_n$.

解：两边对x求导

$$n(x+1)^{n-1} = a_1 + 2a_2(x-1) + 3a_3(x-1)^2 + \cdots + na_n(x-1)^{n-1}$$

两边乘 $(x-1)$

$$n(x-1)(x+1)^{n-1} = a_1(x-1) + 2a_2(x-1)^2 + 3a_3(x-1)^3 + \cdots + na_n(x-1)^n$$

两边再对x求导

$$n(x+1)^{n-1} + n(n-1)(x-1)(x+1)^{n-2} = a_1 + 2^2a_2(x-1) + 3^2a_3(x-1)^2 + \cdots + n^2a_n(x-1)^{n-1}$$

令 $x=2$，$a_1 + 2^2a_2 + 3^2a_3 + \cdots + n^2a_n = n\cdot 3^{n-1} + n(n-1)\cdot 3^{n-2}$

$$= n(n+2)\cdot 3^{n-2}.$$

2.* 证明：$\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}C_n^k = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

~~$(-1)^{k+1}\frac{1}{k}\frac{n!}{k!(n-k)!}$~~

两边的k独立，计和，拉一个倍同一样

$a_n = \sum\limits_{i=2}^{n}(a_i - a_{i-1}) + a_1$

令 $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}C_n^k$

$$a_n - a_{n-1} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}C_n^k - \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}C_{n-1}^k$$

$$= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}(C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}) - \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}C_{n-1}^k$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}(C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}) - \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}C_{n-1}^k + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}C_{n-1}^{k-1} + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}C_{n-1}^{k-1} \quad \left(\frac{1}{k}C_{n-1}^{k-1} = \frac{1}{n}C_n^k\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{1}{n}C_n^k = \frac{1}{n}(-1)\left[\sum_{k=1}^{n}(-1)^kC_n^k\right]$$

$$= \frac{-1}{n}\left[\sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^k - 1\right]$$

$$= -\frac{1}{n}\left[(1-1)^n - 1\right] = \frac{1}{n}.$$

$\therefore a_n = \sum\limits_{i=2}^{n}\frac{1}{i} + 1 = \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$ #.

3.（08 江苏） 在等式 $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 (x \in \mathbf{R})$ 的两边求导，得：$(\cos 2x)' = (2\cos^2 x - 1)'$，由求导法则，得 $(-\sin 2x)\cdot 2 = 4\cos x\cdot(-\sin x)$，化简得等式：$\sin 2x = 2\cos x\cdot \sin x$.

（Ⅰ）利用上题的想法（或其他方法），结合等式 $(1+x)^n = \mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 x + \mathrm{C}_n^2 x^2 + \cdots + \mathrm{C}_n^n x^n \quad (x \in \mathbf{R}$，正整数 $n \geqslant 2)$，证明：$n\left[(1+x)^{n-1} - 1\right] = \sum\limits_{k=2}^{n} k\mathrm{C}_n^k x^{k-1}$.

（Ⅱ）对于正整数 $n \geqslant 3$，求证：(i) $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k k\mathrm{C}_n^k = 0$；(ii) $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k k^2\mathrm{C}_n^k = 0$；

解：(1) 两边对x求导

$$n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2x + 3C_n^3x^2 + \cdots + nC_n^nx^{n-1} \quad (*)$$

$$n\left[(1+x)^{n-1} - 1\right] = \sum_{k=2}^{n}kC_n^kx^{k-1}$$

(2) 由(*)令 $x=-1$ 得

(i) $C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 - \cdots + nC_n^n(-1)^{n-1} = 0$

两边 $\times(-1)$ 得

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^kkC_n^k = 0$$

(ii) (*)两边乘x

$$nx(1+x)^{n-1} = C_n^1x + 2C_n^2x^2 + \cdots + nC_n^nx^n$$

两边对x求导

$$n(1+x)^{n-1} + nx(n-1)(1+x)^{n-2} = C_n^1 + 2^2C_n^2x + \cdots + n^2C_n^nx^{n-1}$$

同乘x：$nx(1+x)^{n-1} + nx^2(n-1)(1+x)^{n-2} = 1^2C_n^1x + 2^2C_n^2x^2 + \cdots + n^2C_n^nx^n$

令 $x=-1$ 得证.

4. (16 年江苏第 23)

(Ⅰ) 求 $7C_6^3-4C_7^4$ 的值；

(Ⅱ) 设 $m,n\in\mathbf{N}^*$，$n\geqslant m$，

求证：$(m+1)C_m^m+(m+2)C_{m+1}^m+(m+3)C_{m+2}^m+\cdots+nC_{n-1}^m+(n+1)C_n^m=(m+1)C_{n+2}^{m+2}$.

解：(1) $7\frac{6!}{3!\cdot 3!}-4\frac{7!}{4!\,3!}$

$=\frac{7!}{3!\cdot 3!}-\frac{7!}{3!\,3!}$

$=0$

$(n+1)C_n^k=(k+1)C_{n+1}^{k+1}$

(2) $Lhs=(m+1)\left(C_{m+1}^{m+1}+C_{m+2}^{m+1}+\cdots+C_{n+1}^{m+1}\right)$

$=(m+1)\left(C_{m+2}^{m+2}+C_{m+2}^{m+1}+\cdots+C_{n+1}^{m+1}\right)$

$=(m+1)\left(C_{n+1}^{m+2}+C_{n+1}^{m+1}\right)$

$=(m+1)C_{n+2}^{m+2}$ 毕.