

黄冈中学 2021 届高三年级第三次模拟考试

数学试卷

命题：

审校：

考试时间：2021 年 5 月 24 日 15:00—17:00

试卷满分：150 分

★祝考试顺利★

注意事项：

1. 答题前，先将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡的指定位置。

2. 选择题的作答：每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

3. 非选择题的作答：用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

4. 保持卡面清洁，不要折叠、不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知 M, N 为 $\mathbb{R}$ 的两个不等的非空子集，若 $M \cap (\complement_{\mathbb{R}} N) = \emptyset$ ，则下列结论错误的是()

A. $\exists x \in N$ ，使得 $x \in M$

B. $\exists x \in N$ ，使得 $x \notin M$

C. $\forall x \in M$ ，都有 $x \in N$

D. $\forall x \in N$ ，都有 $x \in M$

2. 已知复数 z 满足 $z^2 + 4i = 0$ ，则 $|z| = ()$

A. 4

B. 2

C. $\sqrt{2}$

D. 1

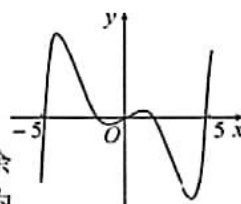
3. 某函数的部分图象如图所示，则该函数的解析式可能是()

A. $f(x) = (e^x - e^{-x})\cos x$

B. $f(x) = (e^x - e^{-x})|\cos x|$

C. $f(x) = (e^x + e^{-x})\cos x$

D. $f(x) = (e^x + e^{-x})\sin x$



4. 近年来，某市为促进生活垃圾的分类处理，将生活垃圾分为厨余垃圾、可回收物和其他垃圾三类，并分别设置了相应的垃圾箱。为调查居民生活垃圾分类投放情况，现随机抽取了该市三类垃圾箱中总计 1000t 生活垃圾，经分拣以后数据统计如表（单位：t）：根据样本估计本市生活垃圾投放情况，下列说法错误的是()

	“厨余垃圾”箱	“可回收物”箱	“其他垃圾”箱
厨余垃圾	400	100	100
可回收物	30	240	30
其他垃圾	20	20	60

- A. 厨余垃圾投放正确的概率为 $\frac{2}{3}$
- B. 居民生活垃圾投放错误的概率为 $\frac{3}{10}$
- C. 该市三类垃圾箱中投放正确的概率最高的是“可回收物”箱
- D. 厨余垃圾在“厨余垃圾”箱、“可回收物”箱、“其他垃圾”箱的投放量的方差为 20000
5. 已知 $\triangle ABC$ 是边长为 4 的等边三角形, 且 $\overline{BD} = 2\overline{DC}$, E 为 AD 中点, 则 $\overline{BE} \cdot \overline{AC} = (\quad)$
- A. -2 B. $-\frac{4}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{8}{3}$
6. 已知 $2020^a = 2021$, $2021^b = 2020$, $c = \ln 2$, 则()
- A. $\log_a c > \log_b c$ B. $\log_c a > \log_c b$
- C. $a^c < b^c$ D. $c^a < c^b$
7. 已知直线 $l: mx + y + \sqrt{3}m - 1 = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 = 4$ 交于 A, B 两点, 过 A, B 分别作 l 的垂线与 x 轴交于 C, D 两点, 若 $|AB| = 2$, 则 $|CD| = (\quad)$
- A. 2 B. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ C. $2\sqrt{3}$ D. 4
8. 若不等式 $(ax^2 + bx + 1)e^x \leq 1$ 对一切 $x \in \mathbb{R}$ 恒成立, 其中 $a, b \in \mathbb{R}$, e 为自然对数的底数, 则 $a + b$ 的取值范围是()
- A. $(-\infty, -1]$ B. $(-3, -1]$ C. $(-\infty, -3]$ D. $(-5, -3]$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 若 α, β 是两个相交平面, 则在下列命题中, 正确的是()
- A. 若直线 $m \perp \alpha$, 则在平面 β 内, 一定不存在与直线 m 平行的直线
- B. 若直线 $m \perp \alpha$, 则在平面 β 内, 一定存在无数条直线与直线 m 垂直
- C. 若直线 $m \subset \alpha$, 则在平面 β 内, 一定存在与直线 m 异面的直线
- D. 若直线 $m \subset \alpha$, 则在平面 β 内, 一定存在与直线 m 垂直的直线
10. 已知动点 P 在双曲线 $C: x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 上, 双曲线 C 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 下列结论正确的是()
- A. 双曲线 C 的渐近线与圆 $(x-2)^2 + y^2 = 3$ 相切
- B. 满足 $|PF_2| = 4$ 的点 P 共有 2 个

C. 直线 $y=k(x-2)$ 与双曲线的两支各有一个交点的充要条件是 $-\sqrt{3} < k < \sqrt{3}$

D. 若 $|PF_1| + |PF_2| = 8$, 则 $S_{\triangle PF_1F_2} = 6$

11. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_1 = p$, $2S_n - S_{n-1} = 2p$ ($n \geq 2, p$ 为非零常数),

则下列结论正确的是 ()

A. 数列 $\{a_n\}$ 是等比数列

B. 当 $p=1$ 时, $S_4 = \frac{15}{8}$

C. 当 $p = \frac{1}{2}$ 时, $a_m \cdot a_n = a_{m+n}$ ($m, n \in N^*$)

D. $|a_3| + |a_8| = |a_5| + |a_6|$

12. 已知 $f(x) = \frac{\sin 2x + 1}{\sin x + \cos x + 2}$, 则 ()

A. $f(x)$ 的图像关于直线 $x = \frac{\pi}{4}$ 对称

B. $f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 上递增

C. $f(x)$ 的值域是 $[0, 2 + \sqrt{2}]$

D. 若方程 $f(x) = \frac{8}{3}$ 在 $\left[0, \frac{45\pi}{4}\right]$ 上的所有实根按从小到大的顺序分别记为

$x_1, x_2, \dots, x_n$, 则 $x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \dots + 2x_{n-1} + x_n = 115\pi$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. $\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} =$ _____.

14. 设 A, B 是抛物线 $C: y^2 = 4x$ 上的两个不同的点, O 为坐标原点, 若直线 OA 与 OB 的斜率之积为 -2 , 则直线 AB 过定点, 定点坐标为 _____.

15. 甲、乙、丙、丁、戊 5 名学生进行劳动技术比赛, 决出第 1 名到第 5 名的名次. 甲、乙两名参赛者去询问成绩, 回答者对甲说: “很遗憾, 你和乙都没有得到冠军”; 对乙说: “你当然不会是最差的”, 则该 5 人可能的排名情况有 _____ 种 (用数字作答).

16. 罗默、伯努利家族、莱布尼兹等大数学家都先后研究过星形线 $C: x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ 的性质, 其形美观, 常用于超轻材料的设计. 曲线 C 围成的图形的面积 S _____ 2 (选填 “>”、“<” 或 “=”), 曲线 C 上的动点到原点的距离的取值范围是 _____.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2$, $n(a_{n+1} - a_n) = a_n + 1$.

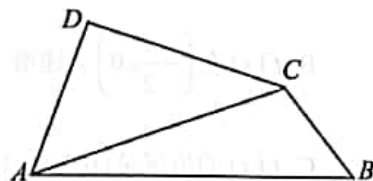
(1) 求证: 数列 $\left\{\frac{a_n + 1}{n}\right\}$ 是常数数列;

(2) 令 $b_n = (-1)^n a_n$, S_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 求使得 $S_n \leq -99$ 的 n 的最小值.

18. (本小题满分 12 分) 在平面四边形 $ABCD$ 中, $\angle ABC = \frac{\pi}{3}$, $\angle ADC = \frac{\pi}{2}$, $BC = 2$.

(1) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, 求 AC ;

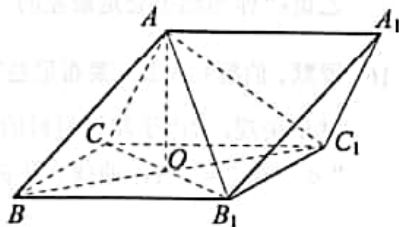
(2) 若 $AD = 2\sqrt{3}$, $\angle ACB = \angle ACD + \frac{\pi}{3}$, 求 $\tan \angle ACD$.



19. (本小题满分 12 分) 如图, 三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 侧面 BB_1C_1C 是菱形, 其对角线的交点为 O , 且 $AB = AC_1 = \sqrt{6}$, $AB \perp B_1C$.

(1) 求证: $AO \perp$ 平面 BB_1C_1C ;

(2) 设 $\angle B_1BC = 60^\circ$, 若直线 A_1B_1 与平面 BB_1C_1C 所成的角为 45° , 求二面角 $A_1-B_1C_1-B$ 的余弦值.



20. (本小题满分12分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 四点 $P_1\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$, $P_2(0, \sqrt{2})$, $P_3\left(1, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$, $P_4\left(1, -\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ 中恰有三点在椭圆 C 上.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 已知直线 $y = kx + 2$ 与椭圆 C 有两个不同的交点 A, B , D 为 x 轴上一点, 是否存在实数 k , 使得 $\triangle ABD$ 是以 D 为直角顶点的等腰直角三角形? 若存在, 求出 k 值及点 D 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

21. (本小题满分12分) 科教兴国, 科技强国. 探索浩瀚宇宙是全人类的共同梦想, 我国广大科技工作者、航天工作者为推动世界航天事业发展付出了艰辛的努力, 为人类和平利用太空、推动构建人类命运共同体贡献了中国智慧、中国方案、中国力量.

(1) 为助力我国航空事业, 某公司试生产一种航空零件, 在生产过程中, 当每小时次品数超过90件时, 产品的次品率会大幅度增加. 为检测公司的试生产能力, 同时尽可能控制不合格品总量, 抽取几组一小时生产的产品数据进行次品情况检查分析, 已知在 x (单位: 百件) 件产品中, 得到次品数量 y (单位: 件) 的情况汇总如表所示, 且 y (单位: 件) 与 x (单位: 百件) 线性相关:

x (百件)	5	20	35	40	50
y (件)	2	14	24	35	40

请根据表格中的数据, 求出 y 关于 x 的线性回归方程; 根据公司规定, 在一小时内不允许次品数超过90件, 请判断可否安排一小时试生产10000件产品的任务?

(2) “战神”太空空间站工作人员需走出太空站完成某项试验任务, 一共只有甲、乙、丙三个人可派, 他们各自能完成任务的概率分别为 P_1, P_2, P_3 , 假设 P_1, P_2, P_3 互不相等, 且假定各人能否完成任务相互独立.

①如果按甲最先, 乙次之, 丙最后的顺序派人, 求任务能完成的概率. 若改变三个人被派出的先后顺序, 任务能被完成的概率是否发生变化?

②假定 $1 > P_1 > P_2 > P_3$, 试分析以怎样的先后顺序派出人员, 可使所需派出的人员数目的数学期望达到最小.

(参考公式：用最小二乘法求线性回归方程 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 的系数公式，

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x} \cdot \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}.)$$

(参考数据： $\sum_{i=1}^5 x_i y_i = 5 \times 2 + 20 \times 14 + 35 \times 24 + 40 \times 35 + 50 \times 40 = 4530$,

$$\sum_{i=1}^5 x_i^2 = 5^2 + 20^2 + 35^2 + 40^2 + 50^2 = 5750.)$$

22. (本小题满分 12 分) 已知函数 $f(x) = mx^2 - \ln x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 讨论关于 x 的方程 $f(x) = m + x^2 \ln x$ 的实根的个数.

