

指向数学抽象素养的教材分析 框架与案例剖析^①

——以人教A版“函数单调性”为例

邓翰香¹ 吴立宝^{1②} 沈婕²

(1. 天津师范大学教育学部 300387; 2. 天津市中小学教育教学研究室 300200)

1 引言

《普通高中数学课程标准(2017年版)》(简称《课标(2017)》)提出数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算与数据分析六大数学学科核心素养^[1],其中数学抽象位居首位. 数学抽象,作为数学产生和发展的思维基础,反映了数学的本质特征,是数学学科核心素养的重要组成部分^[2]. 教材,作为落实课程目标的重要媒介和课程标准的实施载体,是“理想的课程”与“领悟的课程”的桥梁与纽带^[3]. 数学教材,蕴含丰富的数学抽象思想,只有充分挖掘才能更好地为学生数学抽象素养提供良好的素材与机会. 立足现行高中数学教材,探究如何有效培养学生数学抽象素养,一方面为教材编写与修订提供参考;另一方面为教师和学生在学习的过程中发展数学抽象素养提供参考.

2 分析框架

《课标(2017)》指出,数学抽象的主要表现为:获得数学概念和规则,提出数学命题和模型,形成数学方法与思想,认识数学结构与体系^[1]. 本文以此作为数学抽象素养的分析框架来具体分析现行教材.

2.1 获得数学概念和规则

数学抽象的一个重要表现是数学概念和规则的获得. 根据抽象程度的不同,史宁中教授将数学抽象过程细分为三个阶段:一是简约阶段,把握事物本质,把复杂问题简单化并条理清晰的表达;二

是符号阶段,去掉事物的具体内容,利用符号和关系术语等表述已简约化的事物;三是普适阶段,通过假设和推理,建立法则或者模型,能在一般意义上描述具体事物的特征或规律^[4]. 这三个阶段相互连接,后一个阶段建立在前一阶段的基础之上. 数学概念的获得包括概念形成和概念同化两种基本方式. 数学概念的形成,通常会经历以上三个阶段:首先,从直观的背景、具体的材料中抽离出事物的本质特征;其次,对抽象概括对象给予一般表示,并且用符号进行表述;最后,根据符号阶段得出的结论进行定义,形成概念系统进行应用.

2.2 提出数学命题和模型

数学抽象的一个重要过程是数学命题和模型的提出. 数学命题和模型不仅是对数学事实的抽象概括,还具有“工具性”特征,可用于实现“知识迁移”,即来解决某一类问题. 因此,对数学命题和模型的抽象不仅需要关注抽象的结果,还需要关注数学抽象的过程^[5]. 学生在体验和完成学习活动后,获得模型化解决问题的能力,进而将数学与现实世界进行联系;同时,学生经历完整的数学命题的抽象过程,需要理解数学抽象的“基本套路”,获得数学抽象的基本活动经验. 其中,数学抽象的“基本套路”是上述数学抽象的三个阶段的具体步骤(如图1):从“辨别”到“抽象”为简约阶段,抽离事物本质;从“概括”到“形式”为符号阶段,完成符号表达;从“系统”到“运用”为普适阶段,形成理论并运用到具体情境.

① 天津市哲学社会科学规划一般课题——中小学教师教研能力水平评估及提升研究(TJJX17-016)

② 本文通讯作者.

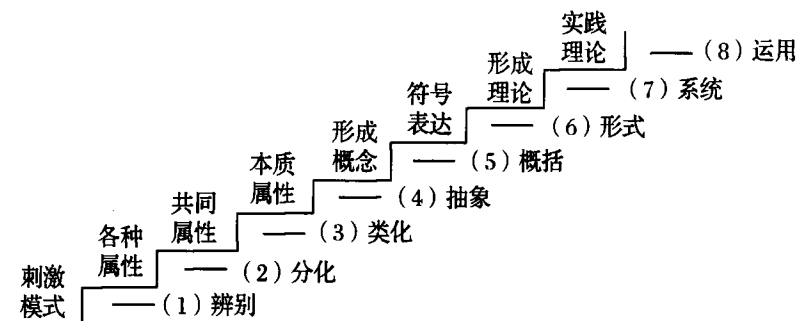


图 1

2.3 形成数学方法与思想

数学抽象的一个重要产物是数学方法与思想的形成. 数学方法与思想作为数学抽象的产物, 蕴含于数学抽象过程中; 同时, 依托数学方法与思想可以反过来加深对数学抽象的理解. 《课标(2017)》提出“运用数学抽象的思维方式思考并解决问题”的表现要求, 史宁中教授认为“思维方法的教育是数学思想与思维经验之和”, 因此在培养数学抽象素养的过程中要重视形成数学方法与思想, 进而真正认识并形成数学抽象的思维方式. 综合来说, 挖掘教材中的数学方法与思想会指向数学抽象素养的提高; 数学抽象素养的提升有助于领悟数学方法与思想.

2.4 认识数学结构与体系

数学抽象的一个更高水平是形成数学结构与体系. 通过数学结构与体系的抽象可以看清知识的“来龙去脉”, 认识到数学理论体系的完善过程, 以及不同研究领域之间的联系与统一性. 在高观点下对知识进行系统梳理以及完整描述某个数学领域的知识体系, 可以让学生理解通过数学抽象所得知识的重要性及必要性, 进而展现数学抽象的独特魅力.

3 以函数单调性为例教材分析

“函数单调性”是人教 A 版高中数学实验教科书必修一第一章第三节“函数的基本性质”的内容. 基于前面的分析框架, 以该节教材内容为例, 具体阐释在函数单调性的教学中如何培养学生的数学抽象素养.

3.1 教材中的“数学概念和规则的获得”

从教材知识编排上看, 学生在初中阶段接触了一些常见的初等函数的图象, 对函数图象的增减性有了初步的感性认识. 在高中阶段学习函数

单调性的概念, 可以从数和形的直观感受出发, 研究自变量变化时函数值的变化规律, 通过定量分析解释定性结果来理解单调性的概念. 从抽象过程上看, 单调性的定义是通过函数图形语言到自然语言、再到符号语言逐步抽象得出的, 其中涉及到了基于几何直观的抽象、对数学研究对象之间关系的抽象和构建模型抽象, 从不同抽象层面上去培养了学生的数学抽象素养.

函数单调性概念的获得, 需要认识到概念的本质. 对抽象的数学概念进行剥茧抽丝, 通过全面分析做到深入理解. 从教材的编排内容可以看出, 函数单调性概念的获得, 恰好经历了史宁中教授提出的“三个阶段”的抽象: 一是在“简约阶段”中, 观察图象直观感受, 通过“上升”“下降”描述图象的变化规律, 抽象出函数的本质特征; 二是在“符号阶段”中, 使用数学符号语言表达增(减)函数定义, 构造概念关系特征, 其中“任意”两字的理解是一个难点; 三是在“普适阶段”中, 完善单调性的知识体系, 运用单调性定义解决问题, 通过例题设置提升问题解决水平和思维抽象素养, 让学生在课堂收获“带得走的东西”.

3.2 教材中的“数学命题和模型的提出”

函数单调性概念的抽象过程需要通过数学探究活动让学生去经历. 函数单调性的探究活动设置是让学生参与到数学命题的建构过程中, 获得对数学抽象过程的体验与感知, 让学生在认知领域进行数学概念的再发现、再创造, 从而培养学生的数学抽象素养. 探究活动内容包括: 让学生经历函数单调性的抽象过程, 尝试从具体的直观特征到利用符号形式化表达数学定义, 构建出概念形成系统并具体应用. 以下将基于教材中的数学探究活动的设置, 分析教材是如何与上述数学抽象

过程的“基本套路”相对应来设置探究活动内容,从而让学生经历函数单调性的完整抽象过程.

3.2.1 图象直观,抽离本质

教材问题 1 观察图 2 中的函数图象,你能说说它们分别反映了相应函数的哪些变化规律吗?

问题 1 的设置是为达到数学抽象过程中起初的“辨别”和“分化”两个步骤. 第一步“辨别(刺激

模式)”:从学生认知基础入手,学生在初中阶段学习了一些常见初等函数,能够感受函数图象的变化规律,由此通过观察直观的函数图象引出课题,达到外部刺激引入情境的效果. 第二步“分化(各种属性)”:依据具体图象来感知函数的性质,在多种函数的性质中,函数图象有递增递减的属性是学生从各种特征当中较为容易分化出的一个特性.

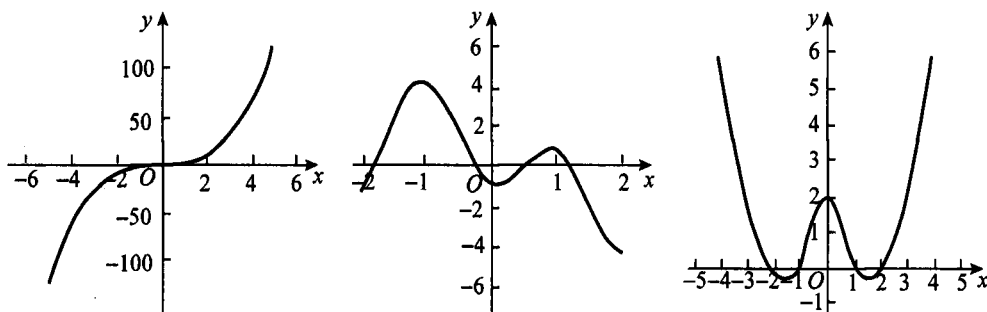


图 2

教材问题 2 研究一次函数 $f(x)=x$ 和二次函数 $f(x)=x^2$ 的图象,描述这两个函数图象的单调性.

问题 2 的设置是为达到数学抽象过程中的“类化”和“抽象”两个步骤. 第三步“类化(共同属性)”:观察图 3,可以看到,函数 $f(x)=x$ 的图象由左至右是上升的;函数 $f(x)=x^2$ 的图象在 y 轴左侧是下降的,在 y 轴右侧是上升的. 对具体函

数图象变化的认识,用图形语言描述函数图象特征,抽离出它们所共有的“上升”“下降”的共同属性. 第四步“抽象(本质属性)”:在引导学生类化出函数“上升”“下降”的共同属性后,可以自然地揭示出函数“变中不变”的本质特征,也就是函数图象的“上升”“下降”反映了函数的一个基本性质——单调性.

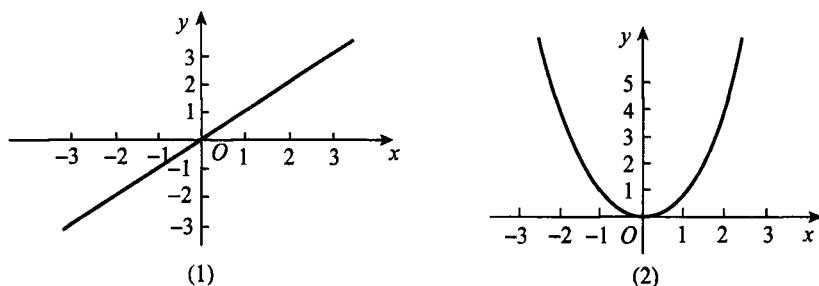


图 3

3.2.2 抽象概括,符号表达

教材问题 3 如何描述函数图象的“上升”“下降”?

问题 3 的设置是为达到数学抽象过程中的“概括”这一步骤. 第五步“概括(形成概念)”:通过问题引导学生从图形语言过渡到用自变量 x 与对应的函数值 y 之间关系的自然语言. 以二次函数 $f(x)=x^2$ 为例,结合图象与列表,让学生用自然

语言描述出函数图象“上升”“下降”的特征. 也就是,函数 $f(x)=x^2$ 图象在 y 轴左侧“下降”,即在区间 $(-\infty, 0]$ 上, $f(x)$ 随着 x 的增大而减小;图象在 y 轴右侧“上升”,即在区间 $(0, +\infty)$ 上, $f(x)$ 随着 x 的增大而增大.

教材问题 4 怎样利用函数解析式 $f(x)=x^2$ 描述“随着 x 的增大,相应的 $f(x)$ 随着减小”“随着 x 的增大,相应的 $f(x)$ 也随着增大”?

问题4的设置是为达到数学抽象过程中的“形式”这一步骤.第六步“形式(符号表达)”:学生尝试用代表数量意义的数学符号来准确描述增(减)函数的形式化定义.对于二次函数 $f(x) = x^2$,用符号语言描述“在区间 $(0, +\infty)$ 上,随着 x 的增大,相应的 $f(x)$ 随着增大”:首先要反映“增大”,就需要两个数 x_1, x_2 ,也就是 $x_1 < x_2$ 时,对应有函数值 $f(x_1)$ 和 $f(x_2)$ 的大小关系;其次,定义作为本质特征的反映,需要揭示出“单调增”的“变中不变”的特性,也就是“函数值 $f(x)$ 随着 x 的增大而增大”,为此,需要引导学生认识到“任意性”,强调 x_1, x_2 在区间上的任意性,将单调递增的特征准确地表述出来.由此,用自然语言表述的“在区间 $(0, +\infty)$ 上,随着 x 的增大,相应的 $f(x)$ 随着增大”,用符号语言描述为:在区间 $(0, +\infty)$ 上,任取 x_1, x_2 ,得到 $f(x_1) = x_1^2, f(x_2) = x_2^2$,当 $x_1 < x_2$ 时,有 $f(x_1) < f(x_2)$.同样地,可以用数学符号语言类比描述函数 $f(x) = x^2$ 在区间 $(-\infty, 0]$ 上,随着 x 的增大,相应的 $f(x)$ 随着减小.

3.2.3 形成理论,拓展应用

增(减)函数定义 设函数 $f(x)$ 的定义域为 I :如果对于定义域 I 内某个区间 D 上的任意两个自变量的值 x_1, x_2 ,当 $x_1 < x_2$ 时,都有 $f(x_1) < f(x_2)$,那么就称函数 $f(x)$ 在区间 D 上是增(减)函数.

单调性定义 如果函数 $y = f(x)$ 在区间 D 上是增函数或减函数,那么就称函数 $y = f(x)$ 在这一区间具有(严格的)单调性,区间 D 叫做 $y = f(x)$ 的单调区间.

教材中增(减)函数定义的给出以及单调性定义的完善是达到数学抽象过程中的“系统”这一步骤.第七步“系统(形成理论)”:通过以上简约阶段、符号阶段的逐级抽象,最终得到增(减)函数的一般性定义.解释说明严格单调与单调区间的含义,深化概念的理解,形成完整系统.

教材例题

例1 根据图象说出函数的单调区间,以及在每一单调区间上,它是增函数还是减函数?

例2 试用函数的单调性证明物理学中的玻意耳定律 $p = \frac{k}{V}$ (k 为正常数):对于一定量的气体,当其体积 V 减小时,压强 p 将增大.

教材中例题的设置是为达到数学抽象过程中

的“运用”这一步骤.第八步“运用(理论实践)”:教材安排的两个例题是从帮助学生把握函数单调性概念的本质出发,体现了“函数单调性”所要达到的教学目标.例1利用图象法来判断函数的单调性以及相应的单调区间.例2利用定义证明物理学中的玻意耳定律,使学生了解定义法在讨论函数单调性问题中的作用并掌握证明单调性的基本步骤.由此,加深对函数单调性的理解,体会用符号形式化表达数学定义的必要性.同时通过例2的学习,引导学生归纳出利用增减函数定义证明函数在给定区间上的单调性的一般方法步骤,帮助学生初步构建出用定义证明函数单调性的解题模式,增强学生的模型化解决问题的能力及应用意识,也进一步让学生感受从具体到抽象得出数学方法的数学抽象过程.其中,用定义法证明函数单调性的一般步骤为:①取值,设 $x_1, x_2 \in D$,且 $x_1 < x_2$;②作差,求 $f(x_1) - f(x_2)$;③变形,向有利于判断差值符号的方向变形;④定号,判断 $f(x_1) - f(x_2)$ 的正负符号;⑤下结论,根据函数单调性的定义下结论.

以上教学过程中,教材内容在编排上通过逐级设问,引导学生从感性认识到理性认识,逐步抽象出函数单调性,最终提出数学命题.在实际教学过程中,教师需要给学生思考的时间和机会,鼓励学生积极参与数学探究活动,使学生通过自身尝试归纳、定义和证明,发展数学抽象素养.

3.3 教材中的“数学方法与思想的形成”

函数单调性的教学不仅要求学生掌握函数单调性的理论知识,参与这一概念的形成过程,而且要让学生在完成本节课的学习之后,知道如何研究这样的性质,这一性质的研究对类似性质的研究有什么借鉴,从中挖掘出在数学抽象过程中形成的数学方法与思想.基于这样的认识,本节课的教学要立足于培养学生数学抽象的思维能力,渗透相应的数学思想方法,体现“数学的方式”,使学生领会到数学地认识并解决问题的思想方法,这样施教才会更有深度^[6].

本节教材在数学抽象过程中体现了抽象与概括、特殊与一般、数形结合、模型化等数学思想方法.教材通过设置问题情境让学生观察、归纳、类比,积累思维活动经验,培养学生的数学抽象能力.例如,教材从研究两个特殊的函数 $f(x) = x$ 和 $f(x) = x^2$ 的单调性出发,用图形语言抽象概

括出函数图象特征,提升归纳的能力;再以函数 $f(x)=x^2$ 为例,通过数形结合,用数学符号语言描述增函数的定义,鼓励学生类比写出 $f(x)=x^2$ 在区间 $(-\infty, 0]$ 上是减函数的定义;进一步发现, $f(x_1)$ 和 $f(x_2)$ 推广到一般函数均可表示为 $f(x_1)$ 和 $f(x_2)$,完成从特殊函数单调性的准确表述到一般函数单调性的准确表述;例题设置解决实际问题,培养学生数学应用的意识,体会数学模型思想.基于以上活动,达到在数学抽象的过程中形成数学方法与思想,并且数学方法与思想的形成又深化对函数单调性理解的相互作用效果.

3.4 教材中的“数学结构与体系的认识”

函数的单调性这一节教材中通过借助数学抽象得出概念并应用概念的过程,让学生看清楚数学知识的发生和发展过程,也就是知识的“来龙去脉”.研究两个特殊函数的单调性,可以借助函数的图象直接予以判断;可倘若是已知函数解析式,却出于某种原因画不出函数图象,此时就需要借助新的代数方法对未知函数的单调性作出判断,这就是抽象的“来龙”.在使用准确的数学语言描述的过程中,要判断在某一区间上函数的单调性,就必须指出在区间上任意两个自变量 x_1, x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时,都有 $f(x_1) < f(x_2)$ (或 $f(x_1) > f(x_2)$).其实质就是当自变量增大时,函数值随之增大或减小,可以转换为判断 $x_1 - x_2$ 与 $f(x_1) - f(x_2)$ 的符号关系.假若把这种关系表示成“差商”的形式,也就转换成在区间上任意两自变量 $x_1 \neq x_2$, 判断 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$ 的正负符号.对这一形式的认识,在知识结构上也为后续以导数为工具研究函数单调性的学习奠定了基础.同时,在这个过程中数学抽象的魅力也体现在可以化无限为有限,通过有限的对象来替代无限的对象,进而简化研究问题.学习完单调性的定义后,例2帮助学生运用单调性来解释玻意耳定律,将抽象的知识运用到实际生活和实践中,这就是抽象的“去脉”.整个函数单调性的抽象过程不仅展现出数学知识的来龙去脉以及知识结构的延续与升华,其中所包含的化无限为有限的思想也充分展现了数学的哲学内涵.

函数单调性作为高中阶段学生接触并研究的第一个函数性质,是后续研究函数的极值与最值的基础,通过增(减)函数定义的获得以及函数单

调性概念的得出,完善函数单调性的知识体系;同时,教材中利用数学抽象研究函数单调性的步骤与方法,为学生后续研究函数的奇偶性以及具体的基本初等函数的性质提供了依据,从而在函数性质的研究方法层面上逐步形成系统.

4 建议

依托数学抽象素养,从数学内容本质、数学探究活动、数学思想方法、数学抽象之美四个方面入手提出了四点建议,它们在培养数学抽象素养过程中的地位及相互之间的关系如图4所示.

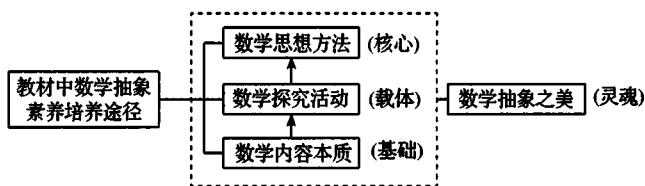


图4 教材中数学抽象素养的培养途径

4.1 抓住教材中的数学内容本质——培养数学抽象素养的基础

以教材中的数学内容本质为基础,来培养学生数学抽象素养.数学教材是开展数学教学的基本依据,也是教师进行教学设计的有利工具.“知识作为数学核心素养的生成本源”^[7],只有对教材中数学内容的本质有清晰认识,才会理解数学内容所体现的数学抽象素养,进而有效地引导学生提升数学抽象素养.其一,教材编排应依据知识间的内在逻辑,将数学知识由具体到抽象地逐级呈现,这样脉络清晰,使学生能感受数学抽象的过程,抓住内容核心.其二,教师应增强对教材内容的文本解读能力,高屋建瓴地理解数学知识,理清教材思路,领悟编者意图,这样才会对数学内容有一个更准确的理解,如函数单调性的数学抽象素养.这其中教师应重点理解教材中知识的前后关系及整体结构、教材编排的特点,数学知识的背景、内涵、应用及拓展,从而对教材有一个更深刻的把握.与此同时,教师可依据史宁中教授提出的数学抽象的“三个阶段”来钻研教材,有利于教师把握数学内容的逐级抽象,顺藤摸瓜理解数学内容本质,培养学生数学抽象素养.

4.2 设置教材中的数学探究活动——培养数学抽象素养的载体

以教材中的数学探究活动为载体,来培养学生数学抽象素养.学生的抽象经验需要在探究活动中积累,抽象能力需要到探究活动中发展,数学

抽象素养需要在数学抽象经验的积淀和升华中培养^[8].其一,教材应该设置相应的数学探究活动,构建学习情境,让学生积累数学抽象的基本活动经验,通过知识和方法的内化,不断提高自身的数学抽象素养能力.其中,教材中数学探究活动的设置需要基于数学抽象的阶段性特点、数学知识的抽象度和学生的数学抽象思维水平,依托数学抽象的“基本套路”,将数学探究活动与数学抽象过程的程序方式相对应,由浅入深设置数学探究活动.这样才会使得每一步活动具有新的探究意义,逐步达到从具体到抽象的过程.其二,教师在课堂上借助教材引导学生进行数学探究活动的过程中,要依据学生学习的心理基础和思维特点进行逐级引导,重现抽象的整个过程,让学生体验并熟悉数学抽象的“基本套路”,不断提升数学抽象素养.

4.3 领悟教材中的数学方法与思想——培养数学抽象素养的核心

以教材中的数学方法与思想为核心,来培养学生数学抽象素养.学生能够领悟蕴涵在知识中的数学方法,形成理解和分析问题的学科思维能力是数学核心素养生成的最高表现^[9].其一,教材编写要体现数学方法与思想,将数学方法与思想“显性化”,依托数学思想方法来加深对数学抽象的理解.在某种意义上,数学的方法是数学知识更高层次的抽象^[10].同时,教材例题的选择要恰当,有利于帮助学生应用教材内容进行数学解题,在模型化解决问题的过程中加深对数学抽象的理解.其二,教师在教学过程中,可以采用观念转变教学、抛锚式教学、支架式教学等建构主义学习理论下的教学模式,让学生亲身经历、实践操作、自主构建,形成灵活运用数学方法与思想解决问题的能力;在引导学生经历数学抽象的过程中,重视学生对教材所蕴含的数学方法与思想的理解掌握,促进学生思维的发展.

4.4 展现教材中的数学抽象之美——培养数学抽象素养的灵魂

以教材中的数学抽象之美为灵魂,来培养学生数学抽象素养.数学抽象研究发展的突破口为关注人的发展,通过对数学抽象之美的展现,改变学生对数学抽象枯燥乏味的刻板印象,突出数学教材的“心理性”,引起学生的学习兴趣^[11].为此,首先从数学抽象的结构体系入手,展现数学抽象的“来龙去脉”.通过创设问题情境,让学生发现有

一大类数学问题解决不了,这就是抽象的“来龙”;在学习了系统的概念定理后,学生通过自己的努力可以解决一大类数学问题,会用抽象的概念描述生活中的一些现象,这就是数学抽象的“去脉”.在学习符号化系统性很强的数学概念、定理时,倘若教师直接把系统的知识“丢”给学生,就会增大学生的认知负荷,降低学习的积极性.从现实出发,逐级引导学生进行学习,让学生在这个过程中感受概念中的每一个符号都是亲切可爱并且有缘由的,从而展现数学抽象的理性之美,如通过梳理数学知识的历史进程,用数学抽象的内在魅力让学生喜欢数学抽象,感受学科文化的全面熏陶;还可以通过抽象素养的小故事,如哥尼斯堡七桥问题、笛卡尔与直角坐标系的建立、数系的扩充与复数的引入等.不管教材还是日常教学,充分利用故事的隐喻性让学生感受数学抽象推进着数学的不断发展,进一步摆脱学生初次学习高度符号化数学概念的生疏印象,体验数学概念在历史长河中逐级抽象,不断完善的过程.教材内容呈现数学抽象的“来龙去脉”,注重知识形成的系统性,在单元“小结”部分进行升华,由此来帮助学生理解数学抽象所获得的知识,对数学知识结构有一个更深的把握.

参考文献

- [1]中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(2017年版)[S].北京:人民教育出版社,2018
- [2]吴立宝,王光明.数学特征视角下的核心素养分析[J].现代基础教育研究,2017,28(3):11-16
- [3]吴立宝,沈婕,王富英.数学教科书隐性三维结构分析[J].教育理论与实践,2017,37(35):33-36
- [4]史宁中.数学思想概论(第1辑):数量与数量关系的抽象[M].长春:东北师范大学出版社,2008:3
- [5]史宁中,王尚志.普通高中数学课程标准(2017年版)解读[M].北京:高等教育出版社,2018:77-79
- [6]章建跃.核心素养统领下的数学教育变革[J].数学通报,2017,56(4):1-4
- [7]喻平.基于核心素养的高中数学课程目标与学业评价[J].课程·教材·教法,2018,38(1):80-85
- [8]李昌官.数学抽象及其教学[J].数学教育学报,2017,26(4):61-64
- [9]喻平.数学核心素养评价的一个框架[J].数学教育学报,2017,26(2):19-23+59
- [10]张宗余,冯斌.数学抽象,数学概念教学抹不开的情愫[J].数学通报,2017,56(2):33-35+63
- [11]章建跃.高中数学教材落实核心素养的几点思考[J].课程·教材·教法,2016,36(7):44-49