专题2：复数知识点和精选提升题（解析版）

复数知识点：

1、**复数的定义：** 设i为方程$x^2=-1$的根，i称为虚数单位，形如$a+bi(a、b\in R)$的数，称为复数. 所有复数构成的集合称复数集, 通常用C来表示.

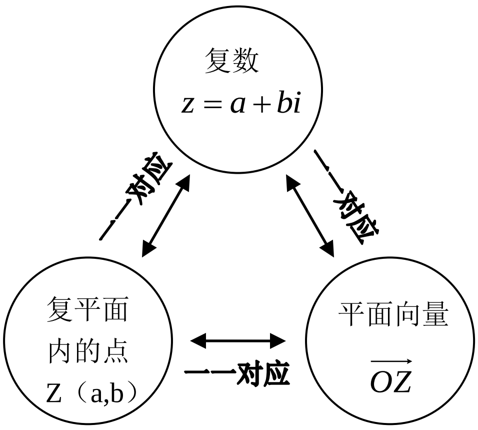
a 为实部，b 为虚部

2．复数集

$$复数\ a+bi(a,b\in R)\begin{cases}实数(b=0)\begin{cases}有理数\begin{cases}整数\\分数\end{cases}\\无理数(无限不循环小数)\end{cases}\\虚数(b\neq 0)\begin{cases}纯虚数(a\neq 0)\\非纯虚数(a=0)\end{cases}\end{cases}$$

3. 复数的几何意义

对任意复数 z=a+bi(a, b∈R)，a 称实部记作 Re(z)，b 称虚部记作 Im(z). z=ai 称为代数形式，它由实部、虚部两部分构成；若将(a, b)作为坐标平面内点的坐标，那么 z 与坐标平面唯一一个点相对应，从而可以建立复数集与坐标平面内所有的点构成的集合之间的一一映射。因此复数可以用点来表示，表示复数的平面称为复平面，x 轴称为实轴，y 轴去掉原点称为虚轴，点称为复数的几何形式；如果将(a, b)作为向量的坐标，复数 z 又对应唯一一个向量。



4. **两个复数相等的定义：** $a+bi=c+di\Leftrightarrow a=c$且$b=d$（其中$a$，$b$，$c$，$d$，$\in R$）**特别地，** $a+bi=0\Leftrightarrow a=b=0$.

5. 复数的四则运算

设$z_1=a_1+b_1i$，$z_2=a_2+b_2i$

（1）加法：$z_1+z_2=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$，即实部与实部相加，虚部与虚部

相加；

（2）减法：$z_1-z_2=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)i$，即实部与实部相减，虚部与虚部相减；

6 共轭复数

若两个复数的实部相等，而虚部是互为相反数时，这两个复数叫互为共轭复数；特别地，虚部不为0的两个共轭复数也叫做共轭虚数；**【注：两个共轭复数之差是纯虚数.（×）[之差可能为零，此时两个复数是相等的]】**

若 z=a+bi，则$z=a+bi$的共轭复数记作$\overline{z}=a-bi$；

$z+\overline{z}$ 为实数，$z-\overline{z}$ 为纯虚数(b≠0).

共轭复数的性质：(1) $|z|=|\overline{z}|=\sqrt{a^2+b^2}$；(2) $z+\overline{z}=2a$；(3) $z-\overline{z}=2bi$；(4) $z\cdot\overline{z}=a^2+b^2\in R, z\cdot\overline{z}=|z|^2=|\overline{z}|^2$；（5）$\overline{z^n}=(\overline{z})^n$；（6）若$|z|=1$，则$\overline{z}=\dfrac{1}{z}$.

7 复数的模

若向量$\overrightarrow{OZ}$表示复数z，则称$\overrightarrow{OZ}$的模r为复数z的模，$|z|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$

一、单选题

1．设复数$z=\dfrac{1+i^{2021}}{2-i}$，则$z$的的虚部是（　　）

A．$\dfrac{3}{5}$　　　　**B．**$\dfrac{3}{5}i$　　　　**C．**$\dfrac{1}{5}$　　　　**D．**$\dfrac{1}{5}i$

【答案】A

【分析】

利用复数乘方运算和除法运算化简复数z，再根据复数的概念可得结果.

【详解】

$$z=\frac{1+i^{2021}}{2-i}=\frac{1+i^{4\times505}\times i}{2-i}=\frac{1+i}{2-i}=\frac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{1+3i}{5},$$

所以z的的虚部是$\dfrac{3}{5}$.

故选：A

2．$\dfrac{3i-5}{2+3i}$的虚部为（　　）

A. $\frac{1}{13}$　　B. $\frac{9}{13}$　　C. $-\frac{1}{13}$　　D. $\frac{21}{13}$

【答案】D

【分析】

给分子分母同乘以$2-3i$，将原式化简为$z=a+bi$的形式，然后得到虚部.

【详解】

由题意得，$\frac{3\mathrm{i}-5}{2+3\mathrm{i}}=\frac{(3\mathrm{i}-5)(2-3\mathrm{i})}{(2+3\mathrm{i})(2-3\mathrm{i})}=\frac{6\mathrm{i}+9-10+15\mathrm{i}}{13}=-\frac{1}{13}+\frac{21}{13}\mathrm{i}$，故其虚部为$\frac{21}{13}$.

故选：D.

3．若复数$z=\frac{a+i}{1-i}$的共轭复数在复平面内对应的点在第二象限内，则实数a的值可以是（　　）

A．1　　B．0　　C．-1　　D．-2

【答案】D

【分析】

利用复数除法运算化简z，根据z的共轭复数在复平面内对应的点在第二象限列不等式组，解不等式组求得a的取值范围，由此确定正确选项.

【详解】

依题意$z=\frac{(a+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{a-1+(a+1)i}{2}$，

$\overline{z}=\frac{a-1-(a+1)i}{2}$

由于$\overline{z}$在复平面内对应的点在第二象限，

所以$\begin{cases}a-1<0\\-(a+1)>0\end{cases}$，解得$a<-1$，

故a的值可以是-2.

故选：D

4．已知复数z与$(z+2)^2-8i$均是纯虚数，则z的虚部为（　　）

A．-2　　B．2　　C．$-2i$　　D．$-2i$

【答案】A

【分析】

利用复数的乘方运算以及复数的概念即可求解.

【详解】

设 $z=bi$ （$b\in\mathbf{R}$，且 $b\neq0$），

则 $(z+2)^2-8i=(bi+2)^2-8i=(4-b^2)+(4b-8)i$；

若 $(z+2)^2-8i$ 是纯虚数，则 $\begin{cases}4-b^2=0,\\4b-8\neq0,\end{cases}$，解得 $b=-2$.

故选：A

5．已知 a，$b\in\mathbf{R}$，复数 $z_1=a+i$，$z_2=2-bi$ (i 为虚数单位)，若 $z_1=\overline{z_2}$，则 $a+b=$

（　　）

A．1　　　　B．2　　　　C．3　　　　D．4

【答案】C

【分析】

利用复数相等，求 a,b 的值.

【详解】

由 $z_1=\overline{z_2}$，得 $a+i=2+bi$，所以 $a=2$，$b=1$，所以 $a+b=3$.

故选：*C*.

6．设 $z=i^3+1$（i 是虚数单位），$\overline{z}$ 是 z 的共轭复数，则 $\overline{z}-z^2=$（　　）

A． $3-i$　　　　**B．** $1+3i$　　　　**C．** $-1-i$　　　　**D．** $1-2i$

【答案】B

【分析】

先求得 z，然后求得 $\overline{z}$，进而求得 $\overline{z}-z^2$.

【详解】

因为 $z=i^3+1=1-i$，所以 $\overline{z}=1+i$，所以 $\overline{z}-z^2=1+i-(1-i)^2=1+i-(-2i)=1+3i$.

故选：B

7．已知复数 z 满足 $z(1-i)=-2i$，则复数 z 的模为（　　）

A． 1　　　　**B．** $\sqrt{2}$　　　　**C．** $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　　　**D．** 2

【答案】B

【分析】

由复数除法运算化简，再结合复数模公式求解即可.

【详解】

由 $z(1-i)=-2i$ 得 $z=\frac{-2i}{1-i}=\frac{-2i(1+i)}{(1-i)(1+i)}=1-i$

所以 $|z|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

故选：B

8．复数 z 满足 $z(1+i)=2-i$，则 $|z|=$（　　）.

A． $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　**B．** $\frac{\sqrt{10}}{2}$　　**C．** $2\sqrt{5}$　　**D．** $\sqrt{10}$

【答案】B

【分析】

先求得 z， 然后求得 $|z|$.

【详解】

$z=\frac{2-i}{1+i}=\frac{(2-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{1-3i}{2}=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$，

所以 $|z|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{2}$.

故选：B

9．已知复数 z 满足 $z=3+2i$，i 是虚数单位，则 $z\cdot\overline{z}=$（　　）

A． $\sqrt{13}$　　**B．** 13　　**C．** $\sqrt{5}$　　**D．** 5

【答案】B

【分析】

由复数的乘法运算得出答案.

【详解】

$z\cdot\overline{z}=(3+2i)(3-2i)=9-4i^2=9+4=13$

故选：B

10．复数 z 满足 $(z-2i)\cdot(1+i)=2$（i 为虚数单位），则复数 $\overline{z}$ 在复平面内对应的点在（　　）

A．第一象限　　**B．第二象限**　　**C．第三象限**　　**D．第四象限**

【答案】D

【分析】

先计算复数 $z=\frac{2}{1+i}+2i$，再求其共轭复数，即可求出共轭复数对应的点，进而可得在复平面内对应的点所在的象限.

【详解】

由 $(z-2i)\cdot(1+i)=2$ 得：

$$z-2i=\frac{2}{1+i}=\frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{2(1-i)}{2}=1-i,$$

$\therefore z=1+i$，$\bar{z}=1-i$.

所以复数 $\bar{z}$ 在复平面内对应的点为 $(1,-1)$，位于第四象限，

故选：D.

11．若复数 z 满足 $z(1+i)=-i$ (其中 i 为虚数单位)则复数 z 的虚部为（　　）

A． $-\frac{1}{2}$　　**B．** $\frac{1}{2}$　　**C．** $-\frac{1}{2}i$　　**D．** $\frac{1}{2}i$

【答案】A

【分析】

先由已知条件利用复数的除法运算求出复数 z，再求其虚部即可.

【详解】

由 $z(1+i)=-i$ 可得 $z=\frac{-i(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{-1-i}{2}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$，

所以复数 z 的虚部为 $-\frac{1}{2}$，

故选：A

12．若复数 z 满足 $z+(5-6i)=3$，则 z 的虚部是（　　）

A． $-2i$　　**B．** $6i$　　**C．1**　　**D．6**

【答案】D

【分析】

由复数的运算求出 z，进而得出虚部.

【详解】

$z=3-(5-6i)=-2+6i$，则 z 的虚部是 6

故选：D

13．设 $a\in\mathbf{R}$，若复数 $z=(1+2i)(a+i)$ 的实部与虚部相等（i 是虚数单位），则 $a=$（　　）

A. -3　　B. -2　　C. 2　　D. 3

【答案】A

【分析】

先利用复数的乘法将 $z=(1+2\mathrm{i})(a+\mathrm{i})$ 展开，利用实部与虚部相等列方程即可求解.

【详解】

$z=(1+2\mathrm{i})(a+\mathrm{i})=a-2+(2a+1)i$，

若实部与虚部相等，

则 $a-2=2a+1$，解得：$a=-3$　，

故选：A

14. $\dfrac{-1+3i}{1-i}=$（　　）

A. $1+2i$　　B. $2-i$　　C. $-2+i$　　D. $1-2i$

【答案】C

【分析】

分子、分母分别乘以 $1+i$，利用复数的乘法运算展开即可求解.

【详解】

$$\frac{-1+3i}{1-i}=\frac{(-1+3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{-4+2i}{2}=-2+i.$$

故选：C

15. 在复平面内，复数 z 对应的点的坐标是 $(2,1)$，则复数 $\overline{z}=$（　　）

A. $2-\mathrm{i}$　　B. $1-2\mathrm{i}$　　C. $2+\mathrm{i}$　　D. $1+2\mathrm{i}$

【答案】A

【分析】

根据复数 z 对应的点的坐标是 $(2,1)$，可直接求得复数 z，再利用共轭复数的概念求解.

【详解】

由复数 z 对应的点的坐标是 $(2,1)$，

可得 $z=2+i$，

故 $\overline{z}=2-i$，

故选：A.

16. 复数 $(1-i)^2=$（　　）

A．0　　B．1　　C．$2i$　　D．$-2i$

【答案】D

【分析】

利用复数的乘法法则可得结果.

【详解】

$(1-i)^2=1^2-2i+i^2=-2i$.

故选：D.

17．复数$\dfrac{1}{1-3\mathrm{i}}$的虚部是（　　）

A．$-\dfrac{3}{10}$　　B．$-\dfrac{1}{10}$　　C．$\dfrac{1}{10}$　　D．$\dfrac{3}{10}$

【答案】D

【分析】

利用复数的除法运算求出 z 即可.

【详解】

因为$z=\dfrac{1}{1-3i}=\dfrac{1+3i}{(1-3i)(1+3i)}=\dfrac{1}{10}+\dfrac{3}{10}i$,

所以复数$z=\dfrac{1}{1-3i}$的虚部为$\dfrac{3}{10}$.

故选：D.

【点睛】

本题主要考查复数的除法运算，涉及到复数的虚部的定义，是一道基础题.

18．设$z=\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}+2\mathrm{i}$，则$|z|=$

A．0　　B．$\dfrac{1}{2}$　　C．1　　D．$\sqrt{2}$

【答案】C

【解析】

分析：利用复数的除法运算法则：分子、分母同乘以分母的共轭复数，化简复数 z，然后求解复数的模.

详解：$z=\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}+2\mathrm{i}=\dfrac{(1-\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}+2\mathrm{i}$

$=-\mathrm{i}+2\mathrm{i}=\mathrm{i}$,

则$|z|=1$，故选 c.

点睛：复数是高考中的必考知识，主要考查复数的概念及复数的运算．要注意对实部、

虚部的理解，掌握纯虚数、共轭复数这些重要概念，复数的运算主要考查除法运算，通过分母实数化转化为复数的乘法，运算时特别要注意多项式相乘后的化简，防止简单问题出错，造成不必要的失分.

19． $\frac{1+2i}{1-2i}=$

A． $-\frac{4}{5}-\frac{3}{5}i$　　**B．** $-\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i$　　**C．** $-\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i$　　**D．** $-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$

【答案】D

【解析】

分析：根据复数除法法则化简复数，即得结果.

详解：$\because \frac{1+2i}{1-2i}=\frac{(1+2i)^2}{5}=\frac{-3+4i}{5}$ $\therefore$ 选 D.

点睛：本题考查复数除法法则，考查学生基本运算能力.

20． $(1+i)(2-i)=$

A． $-3-i$　　**B．** $-3+i$　　**C．** $3-i$　　**D．** $3+i$

【答案】D

【解析】分析：由复数的乘法运算展开即可。

详解：$(1+i)(2-i)=2-i+2i-i^2=3+i$

故选 D.

点睛：本题主要考查复数的四则运算，属于基础题。

21． 设有下面四个命题

p_1：若复数 z 满足 $\frac{1}{z}\in R$，则 $z\in R$；

p_2：若复数 z 满足 $z^2\in \mathbf{R}$，则 $z\in R$；

p_3：若复数 z_1,z_2 满足 $z_1z_2\in R$，则 $z_1=\overline{z_2}$；

p_4：若复数 $z\in R$，则 $\overline{z}\in R$.

其中的真命题为

A． p_1,p_3　　**B．** p_1,p_4

C． p_2,p_3　　**D．** p_2,p_4

【答案】B

【解析】

令 $z=a+bi(a,b\in R)$，则由 $\frac{1}{z}=\frac{1}{a+bi}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}\in \mathbf{R}$ 得 $b=0$，所以 $z\in R$，故 p_1 正确；

当 $z=\mathrm{i}$ 时，因为 $z^2=\mathrm{i}^2=-1\in \mathbf{R}$，而 $z=\mathrm{i}\notin \mathbf{R}$ 知，故 p_2 不正确；

当 $z_1=z_2=\mathrm{i}$ 时，满足 $z_1\cdot z_2=-1\in \mathbf{R}$，但 $z_1\ne \overline{z_2}$，故 p_3 不正确；

对于 p_4，因为实数的共轭复数是它本身，也属于实数，故 p_4 正确，故选 B.

点睛:分式形式的复数，分子、分母同乘以分母的共轭复数，化简成 $z=a+bi(a,b\in R)$ 的形式进行判断，共轭复数只需实部不变，虚部变为原来的相反数即可.

22．复数 $\frac{3+i}{1+i}$ 等于（　）

A． $1+2i$　　**B．** $1-2i$　　**C．** $2+i$　　**D．** $2-i$

【答案】D

【解析】

【分析】

根据复数的除法运算得到结果.

【详解】

$\frac{3+\mathrm{i}}{1+i}=\frac{(3+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{4-2i}{2}=2-\mathrm{i}.$

故选 D.

【点睛】

这个题目考查了复数的除法运算，复数常考的还有几何意义，z＝a＋bi(a，b∈R)与复平面上的点 Z(a，b)、平面向量 $\overrightarrow{OZ}$ 都可建立一一对应的关系(其中 O 是坐标原点)；复平面内，实轴上的点都表示实数；虚轴上的点除原点外都表示纯虚数．涉及到共轭复数的概念，一般地，当两个复数的实部相等，虚部互为相反数时，这两个复数叫做互为共轭复数，复数 z 的共轭复数记作 $\bar{z}$．

23．设复数 z 满足(1+i)z=2i，则｜z｜=

A． $\frac{1}{2}$　　**B．** $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　**C．** $\sqrt{2}$　　**D．2**

【答案】C

【解析】由题意可得：$z=\frac{2i}{1+i},\therefore |z|=\frac{|2i|}{|1+i|}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

本题选择 C 选项.

24．设$(1+i)x=1+yi$，其中 x，y 是实数，则$|x+yi|=$

A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．2

【答案】B

【解析】

试题分析：因为$(1+i)x=1+yi$, 所以

$x+xi=1+yi$,所以$x=1,y=x=1$,故$|x+yi|=|1+i|=\sqrt{2}$, 故选 B.

【考点】复数运算

【名师点睛】复数题也是每年高考的必考内容,一般以客观题的形式出现,属得分题.高考中考查频率较高的内容有：复数相等、复数的几何意义、共轭复数、复数的模及复数的乘除运算.这类问题一般难度不大,但容易出现运算错误,特别是$i^2=-1$中的负号易忽略,所以做复数题时要注意运算的准确性.

25．已知$z=(m+3)+(m-1)i$在复平面内对应的点在第四象限，则实数 m 的取值范围是

A．$(-3,1)$　　B．$(-1,3)$　　C．$(1,+\infty)$　　D．$(-\infty,-3)$

【答案】A

【解析】

试题分析：

要使复数 z 对应的点在第四象限,应满足$\begin{cases} m+3>0 \\ m-1<0 \end{cases}$，解得$-3<m<1$，故选 A.

【考点】 复数的几何意义

【名师点睛】复数的分类及对应点的位置问题都可以转化为复数的实部与虚部应该满足的条件问题，只需把复数化为代数形式，列出实部和虚部满足的方程（不等式）组即可.

复数 z＝a＋bi $\xleftrightarrow{一一对应}$ 复平面内的点 Z（a，b）（a，b∈R）.

复数 z＝a＋bi（a，b∈R）$\xrightarrow{一一对应}$ 平面向量$\overrightarrow{OZ}$.

26．若$z=1+2i$，则$\frac{4i}{z\bar{z}-1}=$

A．1　　B．-1　　C．i　　D．-i

【答案】C

【解析】

试题分析：$\frac{4i}{z\bar{z}-1}=\frac{4i}{(1+2i)(1-2i)-1}=i$，故选C.

【考点】复数的运算、共轭复数.

【举一反三】复数的加、减法运算中，可以从形式上理解为关于虚数单位“i”的多项式合并同类项，复数的乘法与多项式的乘法相类似，只是在结果中把i^2换成−1.复数除法可类比实数运算的分母有理化．复数加、减法的几何意义可依照平面向量的加、减法的几何意义进行理解.

27．设复数z满足$\frac{1+z}{1-z}$=i，则|z|=（ ）

A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．2

【答案】A

【解析】

试题分析：由题意得，$z=\frac{i-1}{1+i}=\frac{(i-1)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=i$，所以$|z|=1$，故选A.

考点：复数的运算与复数的模.

28．若a为实数且$(2+ai)(a-2i)=-4i$，则$a=$（ ）

A．-1　　B．0　　C．1　　D．2

【答案】B

【解析】

由已知得$4a+(a^2-4)i=-4i$，所以$4a=0,a^2-4=-4$，解得$a=0$，故选B.

考点：复数的运算.

29．$\frac{(1+i)^3}{(1-i)^2}=$（ ）

A. $1+i$　　B. $1-i$　　C. $-1+i$　　D. $-1-i$

【答案】D

【解析】试题分析：由已知得 $\frac{(1+i)^3}{(1-i)^2}=\frac{(1+i)^2(1+i)}{(1-i)^2}=\frac{2i(1+i)}{-2i}=-1-i$.

【考点定位】复数的运算.

30．设复数 z_1，z_2 在复平面内的对应点关于虚轴对称，$z_1=2+i$，则 $z_1z_2=$（ ）

A．- 5　　**B．5**　　**C．- 4+ i**　　**D．- 4 - i**

【答案】A

【解析】

试题分析：由题意，得 $z_2=-2+i$，则 $z_1z_2=(2+i)(-2+i)=-5$，故选 A.

考点：1、复数的运算；2、复数的几何意义.